Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Métodos iterativos para solução de sistemas lineares: aceleração usando reflexões circuncentradas[1]

Tainá da Silva[2]
Luiz-Rafael Santos[3]
UFSC, Blumenau, SC

Neste trabalho estudamos a aplicação do Método de reflexões circuncentradas (CRM), recentemente desenvolvido em [2–5], na aceleração de métodos iterativos que se baseiam em projeções ortogonais para encontrar uma solução de um sistema de equações lineares dado por

$$Ax = b \tag{1}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é uma matriz $m \geq n$, esparsa e potencialmente de larga-escala, e ainda $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

Para tal, consideramos métodos que utilizam projeções sobre o hiperplano definido por cada linha do sistema linear dado em (1). Tais projeções (e reflexões) têm um baixo custo computacional e, ao mesmo tempo, em geral são facilmente paralelizáveis. Alguns algoritmos comumente usados neste caso incluem o algoritmo sequencial de Kaczmarz (KACZ) bem como vários algoritmos paralelos em bloco, dentre eles, o método de Cimmino (CIM) e o método de média de componentes (CAV) [6].

Aqui, utilizaremos o CRM para acelerar KACZ, CIM e CAV. A história dos circuncentros remonta a 300 AC, quando foi descrito nos Elementos de Euclides. Mais de dois mil anos depois, em 2018, circuncentros foram usados como uma simples porém efetiva maneira de acelerar os proeminentes métodos de projeções alternadas (MAP) e Douglas-Rachford (DR), levando em conta o comportamento em zig-zag ou em espiral de métodos que se baseiam em projeções. Behling, Bello-Cruz e Santos em [2, 3], introduziram e demonstraram convergência linear de CRM, para o caso em que os conjuntos que se deve projetar são afins.

Informalmente, CRM foi pensado para o seguinte problema: dados dois *subespaços afins* U, V de $\mathbb{R}^n$ com intersecção não-vazia e qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$, queremos encontrar o ponto de $U \cap V$ mais próximo de x, *i.e.*,

$$\text{encontrar } \overline{x} \in U \cap V \text{ tal que } \|\overline{x} - x\| = \min_{w \in U\cap V} \|w - x\|. \tag{2}$$

Denotamos por P_U, P_V as projeções ortogonais sobre U, V respectivamente. Nosso esquema CRM parte do $x \in \mathbb{R}^n$ e o próximo iterado é o circuncentro do triângulo de vértices x, $y := R_U(x)$ e $z := R_V R_U(x)$, denotado por

$$C(x) := \operatorname{circ}\{x, R_U(x), R_V R_U(x)\} = \operatorname{circ}\{x, y, z\}, \tag{3}$$

em que $R_U = 2P_U - I$, $R_V = 2P_V - I$ são as reflexões em torno de U, V respectivamente, e I é a identidade. Um esquema do circuncentro em $\mathbb{R}^2$ é ilustrado na Figura 1.

[1]Este trabalho foi parcialmente financiado por BIPI/UFSC e PIBIC/CNPq.

[2]Graduanda em em Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau. E-mail: tainasilva3012@gmail.com.

[3]Departamento de Matemática, Centro Tecnológico de Ciências Exatas e Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau. E-mail: l.r.santos@ufsc.br.

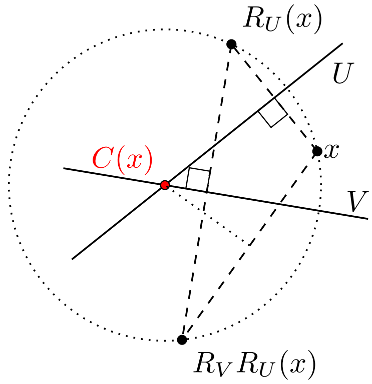

Figura 1: Circuncentro no conjunto afim aff$\{x, y, z\}$.
Fonte: Os autores.

Como estamos em $\mathbb{R}^n$, por circuncentro aqui queremos dizer que $C(x)$ é equidistante à x, y e z e pertence ao espaço afim definido por estes vértices. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $C(x)$ existe, é único e seu cálculo é elementar [2], se $U \cap V \neq \emptyset$. Com efeito, quando bem definidos, circuncentros surgem como intersecção de mediatrizes escolhidas adequadamente e seu cômputo requer a resolução de um sistema linear [1].

Neste trabalho de iniciação científica, foi realizado um estudo da teoria de métodos iterativos que se utilizam de projeções para solução de sistemas lineares esparsos, bem como verificamos a boa-definição da aceleração de KACZ, CIM e CAV usando CRM. Além disso, realizamos a implementação computacional destas acelerações e realizamos testes computacionais seguindo os mesmo testes numéricos realizados por [6], obtendo resultados similares. Como trabalhos futuros, pretendemos considerar uma versão aleatória de CRM em blocos, e compará-lo com versões aleatórias de KACZ e CIM. Além disso, pretende-se paralelizar nosso código de modo a testá-lo em GPUs.

Referências

[1] Baushke H. H., Ouyang, H. and Wang, X. *On Circumcenters of Finite Sets in Hilbert Spaces.* Linear Nonlinear Anal. 4(2):271–295, 2018.

[2] Behling, R., Bello-Cruz, J. Y. and Santos, L.-R. *Circumcentering the Douglas–Rachford method.* Numer. Algorithms. 78(3):59–776, 2018. DOI: 10.1007/s11075-017-0399-5.

[3] Behling, R., Bello-Cruz, J. Y. and Santos, L.-R. *On the linear convergence of the circumcentered-reflection method.* Oper. Res. Lett. 46(2):159–162, 2018. DOI: 10.1016/j.orl.2017.11.018.

[4] Behling, R., Bello-Cruz, J. Y. and Santos, L.-R. *The Block-wise Circumcentered-Reflection Method.* Comput. Optim. Appl. 76(3):675–699, 2020. DOI: 10.1007/s10589-019-00155-0.

[5] Behling, R., Bello-Cruz, J. Y. and Santos, L.-R. *On the Circumcentered-Reflection Method for the Convex Feasibility Problem.* Numer. Algorithms. 86:1475–1494, 2021. DOI: 10.1007/s11075-020-00941-6.

[6] Elble, J. M., Sahinidis, N. V. and Vouzis, P. *GPU computing with Kaczmarz's and other iterative algorithms for linear systems.* Parallel Comput. 36(5–6):215–231, 2010. DOI: 10.1016/j.parco.2009.12.003.