Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Soluções analíticas para o escoamento de uma película sobre uma placa inclinada

Isabella Lopes Corrêa[1]
Gilcilene Sanchez de Paulo[2]
FCT - UNESP, Presidente Prudente, SP

Considere o escoamento incompressível e isotérmico de uma película fina, de espessura uniforme δ, de um fluido Newtoniano sobre uma placa inclinada, como mostra a Figura 1.

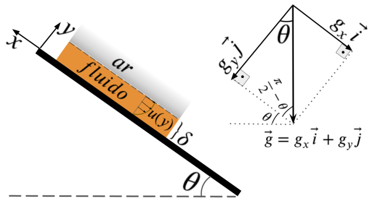


Figura 1: O escoamento de uma película fina sobre uma placa com inclinação θ.

O ar ambiente é considerado estacionário então, na interface fluido-ar a tensão de cisalhamento é nula, $\tau_{yx} = 0$, e o fluxo é impulsionado apenas pela gravidade. Sobre a placa emprega-se a condição de não-escorregamento. Para este problema, a tensão superficial do líquido pode ser desprezada. Neste trabalho, a velocidade, a velocidade média e a pressão são determinadas analiticamente para este escoamento no estado estacionário.

As equações que modelam escoamentos incompressíveis e isotérmicos de fluidos Newtonianos em coordenadas Cartesianas bidimensionais são dadas pelas equações (1)-(3):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ , \tag{1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g_x \ , \tag{2}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g_y \ . \tag{3}$$

Com as hipóteses descritas inicialmente para o problema da Figura 1, assumem-se que $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, pois o escoamento é estacionário; e a velocidade é dada por $\mathbf{u}(x, y) = (u(x, y), 0)$, pois o escoamento é unidirecional. Desta forma, a equação (1) reduz-se a $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e, portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y) = (u(y), 0)$. Em adição, o escoamento na direção-x é gerado apenas pelo campo gravitacional, então $\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} = 0$ e, portanto, a pressão também só depende de y, $\mathrm{p} = \mathrm{p}(y)$.

[1]isabella.lopes@unesp.br
[2]gilcilene.sanchez@unesp.br

Logo, simplificando as equações (1)–(3), têm-se as equações governantes

$$\eta \frac{d^2u}{dy^2} = -\rho \; g \; \mathrm{sen}(\theta) \; , \tag{4}$$

$$\frac{d\mathrm{p}}{dy} = \rho \; g \; \cos(\theta) \; , \tag{5}$$

onde $g = ||\vec{g}||$, e as condições de contorno na placa e na superfície livre, respectivamente, são

$$u = 0 \text{ em } y = 0, \tag{6}$$

$$\tau_{yx} = \eta \frac{du}{dy} = 0 \text{ em } y = \delta. \tag{7}$$

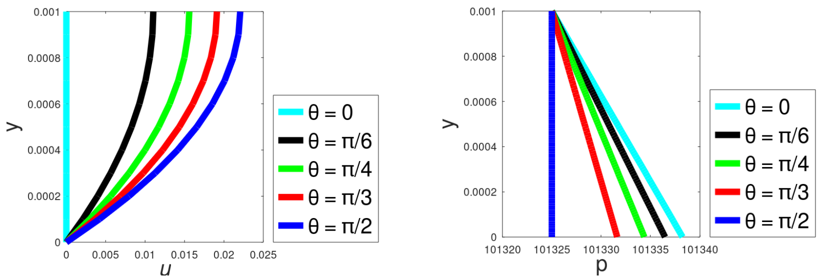
Para resolver o sistema de equações (4)–(7), integra-se a equação (4) duas vezes com respeito a y, resultando em $u(y) = \dfrac{\rho \; g \; \mathrm{sen}(\theta)}{\eta} \dfrac{y^2}{2} + c_1 y + c_2$ e, aplicando as condições (6) e (7), obtém-se respectivamente $c_2 = 0$ e $c_1 = \dfrac{\rho \; g \; \mathrm{sen}(\theta)\delta}{\eta}$. Portanto, a solução analítica da velocidade é dada por

$$u(y) = \frac{\rho \; g \; \mathrm{sen}(\theta)}{\eta} \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right) \; . \tag{8}$$

Consequentemente, a velocidade média, $\overline{u}$, ao longo de uma seção transversal da película é obtida por

$$\overline{u}(y) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u(y) dy = \frac{\rho \; g \; \mathrm{sen}(\theta)\delta^2}{3\eta} \; . \tag{9}$$

Para solucionar a pressão, integra-se a equação (5) em y, obtendo $\mathrm{p}(y) = -\rho \; g \; \cos(\theta) y + c$. Na superfície livre, em $y = \delta$, a pressão deve ser igual à pressão atmosférica, $\mathrm{p}(\delta) = \mathrm{p}_0$, logo, $c = \mathrm{p}_0 + \rho \; g \; \cos(\theta)$. Portanto, a pressão neste escoamento é distribuída da seguinte forma: $\mathrm{p}(y) = \mathrm{p}_0 + \rho \; g \; (\delta - y) \cos(\theta)$. A Figura 2 apresenta o perfil da velocidade do escoamento da película fina para diversas inclinações da placa, bem como a atuação da pressão nestes casos.



(a) Velocidade. (b) Pressão.

Figura 2: Soluções analíticas com diversas inclinações da placa, $\theta = 0$, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$ e com $\eta = 0,3 \; Kg/m \cdot s$, $\rho = 1.350 \; Kg/m^3$, $g = 9,81 \; m/s^2$, $\mathrm{p}_0 = 101.325 \; Pa$ e $\delta = 0,001 \; m = 1 \; mm$.

Referências

[1] Papanastasiou, T. C., Georgiou, G. C., Alexandrou, A. N., *Viscous fluid flow, 1a. edição.* CRC Press, 1999.