Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Soluções Numéricas de EDP's utilizando FreeFem++

George T. da Silva[1]
IM/UFAL, Maceió, AL

1 Resumo

Em equações diferenciais parciais encontramos problemas para determinar as soluções analíticas as vezes se torna complicada de determinar por causa de inúmeras restrições e parâmetros a serem encontrados. O FreeFem++ é um programa para resoluções numéricas de EDP's em 2D e 3D com utilização dos Elementos Finitos e o Método de Galerkin para encontrar as soluções aproximadas.

2 Introdução

Em EDP's temos as soluções clássicas que são bem definida em um domínio, ou seja, soluções explicitas. O que pode ocorrer uma singularidade na condição inicial e a solução deixa de ser clássica. Então nas soluções fracas buscamos soluções além das soluções clássicas , ou seja, soluções descontínuas.

Diante desse problema iremos ilustrar o problema de Poisson em 2D da sua forma forte para forma fraca com as condições de Dirichlet e o desenvolvimento no freefem++ (este programa faz uso da formulação fraca das EDP's).

3 Desenvolvimento

O problema de Dirichlet: para equação de Poisson , dadas as funções $g \in C^0(\partial\Omega)$, $f \in C^0(\Omega)$, encontrar uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } \Omega \in \mathbb{R}^2 \\ u = g \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \qquad (1) \quad \text{Laplaciano é definido por } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{veja [1].}$$

Onde Dirichlet especifica os valores que uma solução necessita tomar no contorno do domínio.
Esboço da solução:

Seja $v \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função teste satisfazendo $v = 0$ sobre $\partial\Omega$. Multiplicando ambos os lados de (1) e integrando sobre Ω, obtemos

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v dxdy = \int_\Omega f \cdot v dxdy \qquad (2)$$

Note que $\Delta u = div(\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u$, aplicando a propriedade de Green em (2), obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy - \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_\Omega f \cdot v dxdy$$

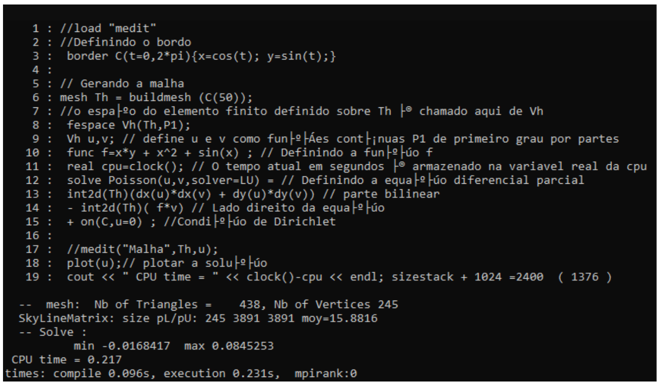
[1]george.silva@im.ufal.br.

como $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy = \int_\Omega f \cdot v dxdy$.

Logo, a versão fraca $\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - f \cdot v \right) dxdy = 0$ que é usada em [3].

4 Resultados Numéricos

Fazendo uso do Método de Elementos Finitos,na formulação de Galerkin no FreeFem++ para solução numérica da EDP de Poisson obtemos:



```
//load "medit"
//Definindo o bordo
 border C(t=0,2*pi){x=cos(t); y=sin(t);}

// Gerando a malha
mesh Th = buildmesh (C(50));
//o espa├ºo do elemento finito definido sobre Th ├® chamado aqui de Vh
 fespace Vh(Th,P1);
 Vh u,v; // define u e v como fun├º├Áes cont├¡nuas P1 de primeiro grau por partes
 func f=x*y + x^2 + sin(x) ; // Definindo a fun├º├úo f
 real cpu=clock(); // O tempo atual em segundos ├® armazenado na variavel real da cpu
 solve Poisson(u,v,solver=LU) = // Definindo a equa├º├úo diferencial parcial
 int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)) // parte bilinear
 - int2d(Th)( f*v) // Lado direito da equa├º├úo
 + on(C,u=0) ; //Condi├º├úo de Dirichlet

 //medit("Malha",Th,u);
 plot(u);// plotar a solu├º├úo
 cout << " CPU time = " << clock()-cpu << endl; sizestack + 1024 =2400  ( 1376 )

 --  mesh:  Nb of Triangles =    438, Nb of Vertices 245
 SkyLineMatrix: size pL/pU: 245 3891 3891 moy=15.8816
 -- Solve :
        min -0.0168417  max 0.0845253
 CPU time = 0.217
times: compile 0.096s, execution 0.231s,  mpirank:0
```

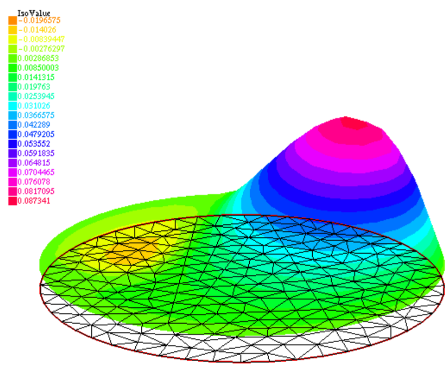


Figura 1: Código no *freefem++* à esquerda e imagem resultante à direita.

Aproximação	$-0.0196575 : 0.087341$
Mínimo	-0.0168417
Máximo	0.08445253
No de Vértices(Nós)	245
No de Triângulos	438

Tabela 1: Resultado da EDP de Poisson em 2D no FreeFem ++

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal de Alagoas pela concessão da bolsa de Iniciação Científica (IC) no Instituto de Matemática. Este trabalho faz parte do meu trabalho de IC do projeto intitulado *Análise Numérica e Soluções de Equações Diferenciais* sob a orientação do Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa.

Referências

[1] Biezuner, Rodney J. *Notas de Aula Equações Diferenciais Paricias I/II*, Minas Gerais, 6 de outubro de 2010.

[2] Burden, Richard L. and Faires, Douglas J. *Numerical Analysis*, 8.ed norte-americana, 2008.

[3] "FreeFEM", `https://freefem.org//`, "acessado em 24/04/2021",