Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

A equação de Burgers Unidimensional

Nathalie Freitas Bica[1]
Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre, RS
Juliana Sartori Ziebell[2]
Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre, RS

A equação de difusão linear mais simples que se conhece é a equação de Burgers, que pode ser expressa por

$$u_t + cuu_x = \mu u_{xx} \tag{1}$$

para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, onde c e μ são constantes e μ representa a viscosidade. O estudo dessa equação é de extrema importância, já que ela é utilizada como modelo matemático para análise de fenômenos que tratam do estudo da turbulência, formação de choque, entre outros. A equação de Burgers, estabelecida por Burgers em 1940 [2], é uma equação diferencial parcial, simplificada das equações de Navier-Stokes, do tipo convecção-difusão, para casos em que o gradiente de pressão possa ser ignorado. O termo não linear dá origem a uma onda que se move em alguma direção. Essa onda eventualmente se dissipa e a solução não-linear tende à mesma forma da solução não linearizada, porém com amplitude menor.

A solução desta equação sem viscosidade, ou seja com $\mu = 0$, se dará pelo método das características (ver por exemplo [1]), no qual é possível descobrir curvas características, onde a equação é reduzida para uma EDO. Iremos apresentar alguns exemplos onde aplicamos esse método.

Considerando $\mu > 0$, Hopf(1950) [4] e Cole(1951) [3] deduziram que as Equações de Burgers podem ser transformadas para uma equação linear da difusão do calor, que ficou conhecida como "transformação de Hopf-Cole", descrita no seguinte Teorema:

Teorema 0.1. *Se $v(x,t) > 0$ é uma solução positiva qualquer da equação do calor*

$$v_t = \mu v_{xx}, \tag{2}$$

então

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}[-2\mu \ln(v(x,t))] = -2\mu \frac{v-x}{v}$$

é solução da equação de Burgers (1).

Portanto com essa transformação resolvemos a Equação de Burgers com viscosidade. A demonstração desse teorema está descrita em [5]. A seguir, uma ideia dessa demonstração:

Demonstração. Seja $v(x,t) = e^{\alpha\phi(x,t)}$ solução da equação do calor. Então $\phi(x,t) = \frac{1}{\alpha}\ln(v(x,t))$. Calculando as derivadas de $v(x,t)$ e substituindo na equação do calor (2), temos que

$$\phi_t = \mu\phi_{xx} + \mu\alpha\phi_x^2$$

[1]nathaliefbica1234@gmail.com
[2]julianaziebell@ufrgs.br

Derivando a equação acima em relação a x,

$$\phi_{tx} = \mu\phi_{xxx} + 2\mu\alpha\phi_x\phi_{xx}$$

Tomando ϕ tal que $\dfrac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} = u(x,t)$ e $\alpha = -1/(2\mu)$ obtemos a equação (1). $\square$

Nesse trabalho, aplicaremos esse Teorema em alguns casos particulares.

Entre as demonstrações que se farão presentes nesse estudo, faz-se importante as demonstrações, apresentadas em [6], do teorema da monotonicidade da solução, no qual $\|u(x,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(x,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}$ para todo $t > 0$, ou seja, conhecendo a condição inicial teremos noção da dimensão de u(x,t), e ainda do teorema da conservação de massa, que sendo $u(x,t)$ solução para a equação de Burgers, com $u(x,0) \in L^1(\mathbb{R})$ tem-se que a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx$

Referências

[1] Guenther, R.B. and Lee, J.W. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equation*, Dover Publications, New York, 1988.

[2] Burgers, J.M. Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence, *Nederl. Akad. Wefensh. Proc.*, volume 43, pages 2-12, 1940. DOI: 10.1007/978-94-011-0195-0_12.

[3] Cole, J. D. On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynam- ics. *Quart. Appl. Math*, volume 9, pages 225-236, 1951. DOI: doi.org/10.1090/qam/42889.

[4] Hopf, E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math.*, volume 3, pages 201-230, 1950. DOI: 10.1002/cpa.3160030302

[5] Olver, Peter J. *Introduction to Partial Differential Equations. - Undergraduate Texts In Mathematics*, Springer, Califórnia, 2014.

[6] Pasa, B. C. Equação de Burgers: Propriedades e comportamento assintótico, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.

