

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Modelagem Matemática, Simulação Computacional e Validação Experimental de uma Bancada para Simulação de Aclives de Solos Agrícolas

Marcia Regina Maboni Hoppen Porsch<sup>1</sup>

Ivan Junior Mantovani<sup>2</sup>

Antonio Carlos Valdiero<sup>3</sup>

Depto de Ciências Exatas e Engenharias, UNIJUÍ, Panambi, RS

**Resumo.** Este trabalho propõe e descreve um modelo matemático de 5ª ordem através de um conjunto de equações diferenciais ordinárias não lineares, para uma bancada experimental acionada por um atuador pneumático a partir das principais características, incluindo a dinâmica inercial da bancada experimental para terrenos inclinados, bem como a simulação computacional e os testes experimentais para validação do modelo proposto. Os parâmetros do sistema são definidos a partir de dados experimentais do protótipo da bancada de laboratório. A simulação de terrenos inclinados é importante para prever as condições de funcionamento em laboratório de máquinas agrícolas nas condições em campo.

**Palavras-chave.** Modelagem Matemática, Servoposicionador Pneumático, Simulação Computacional de Inclinação, Bancada Experimental

## 1 Introdução

Este trabalho apresenta os resultados conclusivos da pesquisa sobre a modelagem matemática não linear de uma bancada para simulação de aclives de solos agrícolas com acionamento pneumático. A partir dos resultados parciais de simulação computacional [1] e da validação experimental [2], desenvolveu-se um modelo matemático de 5ª ordem representado por um conjunto de equações diferenciais ordinárias não lineares, para uma bancada experimental com o objetivo de simular as condições de trabalho de equipamentos agrícolas em terrenos com inclinação lateral.

Um dos diferenciais inovadores do protótipo da bancada utilizada é o acionamento por atuadores pneumáticos. Atualmente, o ar comprimido é utilizado em larga escala em máquinas e equipamentos devido às suas características como a simplicidade de manutenção, o baixo custo de implantação, a operação sem fadiga, a boa relação entre potência

---

<sup>1</sup>marcia.-porsch@hotmail.com

<sup>2</sup>ivan.mantovani8@gmail.com

<sup>3</sup>valdiero@unijui.edu.br

fornecida e tamanho dos componentes, a alta confiabilidade, a flexibilidade de instalação e o fato de estar disponível em quase todas as instalações industriais [3].

Mas existem dificuldades de modelagem e controle de acionamentos pneumáticos devido às suas diversas características não lineares, como a compressibilidade do ar, o comportamento não linear da vazão mássica nos orifícios da válvula, a não linearidade de zona morta na válvula, bem como o atrito nas vedações do cilindro [3,4]. Dentro deste contexto, a modelagem matemática aplicada torna-se importante para a simulação do comportamento do sistema dinâmico, bem como também em aplicações de controle baseado em modelo como uma forma de compensar as características não lineares e minimizar seus efeitos danosos, os quais prejudicam o desempenho do sistema [2].

A seção seguinte descreve a bancada experimental utilizada para os testes da simulação de acives e na seção 3 desenvolve-se a modelagem matemática não linear da bancada com acionamento pneumático. Na seção 4 tem-se os resultados de simulações computacionais e da validação experimental do modelo proposto. Por fim, apresentam-se as conclusões e agradecimentos.

## 2 Descrição da Bancada e do Sistema de Acionamento

A bancada experimental é formada por um mecanismo que é composto por uma base fixa e por um sistema articulado que tem a função de simular a inclinação transversal (movimentos angulares) de uma máquina ou equipamento agrícola em trabalho em solos ondulados. O acionamento é realizado por um servoposicionador pneumático composto por um cilindro de dupla ação e haste simples e uma servoválvula de controle direcional de cinco vias. O controlador é implementado utilizando-se uma placa eletrônica dSPACE e a integração dos softwares MatLab/Simulink e ControlDesk como meio de programação. Na Figura 1 mostra-se a fotografia de seu protótipo.



Figura 1: Fotografia do protótipo da bancada de simulação de acives transversais acionada pneumaticamente.

O servoposicionador permite posicionar uma carga em um determinado ponto do curso do atuador ou seguir uma trajetória variável em função do tempo. Na Figura 2 mostra o desenho esquemático de um servoposicionador pneumático.

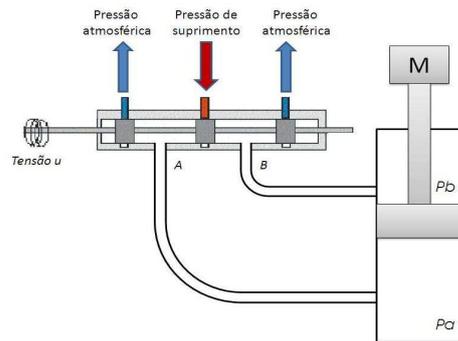


Figura 2: Desenho esquemático de um servoposicionador pneumático

O servoposicionador pneumático funciona com o ar comprimido que é fornecido à servoválvula a uma dada pressão de suprimento previamente regulada. Durante a operação, o sinal de controle  $u$  energiza o solenoide da válvula de modo que uma força magnética resultante é aplicada no carretel da servoválvula, produzindo o deslocamento do carretel [4]. O cilindro pneumático, ao deslocar linearmente sua haste, produz um deslocamento angular da bancada, como consequência do torque resultante.

### 3 Modelagem Matemática do Sistema

A modelagem matemática da dinâmica do movimento de rotação da bancada, cujo diagrama de corpo livre está ilustrado na Figura 3, é formulada a partir do Princípio de D'Alembert do equilíbrio dinâmico do sistema [2].

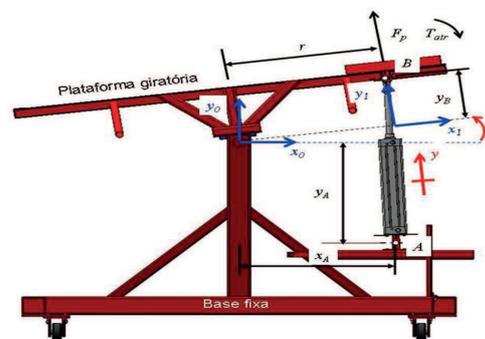


Figura 3: Desenho esquemático da bancada com representação dos sistemas de coordenadas de referência e das forças atuantes

Aplicando-se o somatório dos torques e o equilíbrio das forças no êmbolo do atuador, obtém-se a equação (1) que representa a dinâmica do movimento translacional da plataforma girante.

$$I_0\ddot{\theta} + T_{atr} - T_g = r(F_p - F_{art} - F_g - F_l - M\ddot{y}). \quad (1)$$

Onde,  $I_0$  é o momento de inércia da plataforma girante em torno do eixo de giro,  $\ddot{\theta}$  é a aceleração angular da plataforma,  $T_{atr}(= \sigma_2 \dot{\theta})$  é o torque de atrito viscoso,  $T_g$  representa o torque de gravidade,  $r$  é a distância do centro de giro ao ponto de aplicação da força,  $F_p$  é a força pneumática,  $F_{atr}$  é a força de atrito dinâmico e  $F_g$  é a componente da força de gravidade,  $F_l$  é a força de carga,  $M$  é a massa deslocada,  $\ddot{y}$  é a aceleração do cilindro. A relação cinemática entre o movimento linear  $y$  da haste do atuador pneumático e o movimento angular  $\theta$  da plataforma girante [2] é dada pela equação (2):

$$y(\theta) = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - 2|L_1||L_2| \cos(\theta - \Delta\varphi)} - L_3. \quad (2)$$

Onde os parâmetros  $L_1$ ,  $L_2$  e  $\Delta\varphi$  são dados pelas expressões:

$$L_1 = \sqrt{x_A^2 + y_A}, \quad (3)$$

$$L_2 = \sqrt{(a + x_B)^2 + y_B}, \quad (4)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (5)$$

A força pneumática  $F_p$  é dada pela equação (6):

$$F_p = A_1 p_a - A_2 p_b. \quad (6)$$

Onde  $A_1$  e  $A_2$  são as áreas das seções transversais das câmaras do cilindro pneumático, e  $p_a$  e  $p_b$  são as respectivas pressões nestas câmaras, cujas dinâmicas podem ser obtidas em [3] e são descritas pelas equações (7,8):

$$\dot{p}_a = -\frac{A_1 \gamma \dot{y}(\theta)}{A_1 y(\theta) + V_{a0}} p_a + \frac{R \gamma T}{A_1 y(\theta) + V_{a0}} q_{ma}(p_a, u), \quad (7)$$

$$\dot{p}_b = -\frac{A_2 \gamma \dot{y}(\theta)}{V_{b0} - A_2 y(\theta)} p_b + \frac{R \gamma T}{V_{b0} - A_2 y(\theta)} q_{mb}(p_b, u). \quad (8)$$

Onde  $q_{ma}$  e  $q_{mb}$  são as vazões mássicas nas câmaras do cilindro,  $T$  é a temperatura do ar de suprimento em Kelvin,  $R$  é a constante universal dos gases,  $\gamma$  é a relação entre os calores específicos do ar,  $V_{a0}$  e  $V_{b0}$  são os volume nas câmaras do cilindro quando a posição do atuador é  $y = 0$ ,  $u$  é o sinal de controle em tensão aplicado na servoválvula,  $y(\theta)$  e  $\dot{y}(\theta)$  são respectivamente a posição e a velocidade linear da haste do atuador pneumático em função da inclinação  $\theta$ . As vazões mássicas  $q_{ma}$  e  $q_{mb}$  são dadas pelas equações (9, 10) [3]:

$$q_{ma}(u, p_a) = g_1(p_a, \text{sign}(u)) \arctg(2u), \quad (9)$$

$$q_{mb}(u, p_b) = g_2(p_b, \text{sign}(u)) \arctg(2u). \quad (10)$$

Onde  $g_1$  e  $g_2$  são funções dadas pelas equações (11,12).

$$g_1(p_a, \text{sign}(u)) = \beta \Delta p_a = \begin{cases} (p_{sup} - p_a) \beta^{ench}, & \text{se } u \geq 0. \\ (p_a - p_{atm}) \beta^{esv}, & \text{se } u < 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$g_2(p_b, \text{sign}(u)) = \beta \Delta p_b = \begin{cases} (p_{sup} - p_b) \beta^{ench}, & \text{se } u < 0. \\ (p_b - p_{atm}) \beta^{esv}, & \text{se } u \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Onde  $p_{sup}$  é a pressão de suprimento,  $p_{atm}$  é a pressão atmosférica,  $\beta^{ench}$  e  $\beta^{esv}$  são coeficientes do enchimento e do esvaziamento das câmaras do cilindro. O modelo matemático da zona morta [4], pode ser descrito pela equação (13):

$$u_{zm}(t) = \begin{cases} md(u(t) - zmd), & \text{se } u(t) \geq zmd. \\ 0 & \text{se } zme < u(t) < zmd. \\ me(u(t) - zme), & \text{se } u(t) \leq zme. \end{cases} \quad (13)$$

Onde  $u$  é o sinal de entrada,  $u_{zm}$  é o valor de saída,  $zmd$  é o limite direito da zona morta,  $zme$  o valor esquerdo da zona morta,  $md$  é a inclinação direita da zona morta e  $me$  é a inclinação esquerda da zona morta. O atrito dinâmico utilizado baseia-se no modelo LuGre, conforme [5] e é dado pela equação (14):

$$\frac{dz}{dt} = \dot{y} (1 - \alpha(z, \dot{y})) \frac{\alpha_0}{g_{ss}(\dot{y})} \text{sign}(\dot{y}) z. \quad (14)$$

Em que  $\alpha(z, \dot{y})$  é utilizada para obter a representação da região de atrito estático e  $g_{ss}(\dot{y})$  representa uma função do atrito em regime permanente. Assim, reescrevendo-se as equações (1,7,8,14) e usando as variáveis de estado  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_3 = p_a$ ,  $x_4 = p_b$  e  $x_5 = z$ , pode-se representar o sistema dinâmico como um modelo matemático de 5ª ordem dado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias não lineares:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (15)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{r}{I} (A_1 x_3 - A_2 x_4 - F_{atr}(x_5, \dot{y}) - F_g - M \ddot{y}) - \frac{1}{I} (\sigma_2 x_2 - T_g), \quad (16)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{A_1 \gamma \dot{y}(x_1)}{A_1 y(x_1) + V_{a0}} x_3 + \frac{R \gamma T}{A_1 y(x_1) + V_{a0}} q_{ma}(x_3, u), \quad (17)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{A_2 \gamma \dot{y}(x_1)}{V_{b0} - A_2 y(x_1)} x_4 + \frac{R \gamma T}{V_{b0} - A_2 y(x_1)} q_{mb}(x_4, u), \quad (18)$$

$$\dot{x}_5 = \dot{y} (1 - \alpha(x_5, \dot{y})) \frac{\alpha_0}{g_{ss}(\dot{y})} \text{sign}(\dot{y}) x_5. \quad (19)$$

Onde  $x_1$  é o ângulo de inclinação da plataforma,  $x_2$  é a velocidade angular,  $x_3$  e  $x_4$  são as pressões nas câmaras do cilindro e  $x_5$  representa a dinâmica das microdeformações do estado de atrito no atuador pneumático.

Tabela 1: Tabela dos parâmetros da plataforma girante e do atuador pneumático.

Parâmetros do sistema	Descrição.
$I = 159,637kg.m^2$	Momento de inércia
$L_3 = 0,880m$	Comprimento do atuador quando $y = 0$
$M = 276,31kg$	Massa da plataforma girante
$A_1 = 3,117.10^{-3}m^2, A_2 = 2,803.10^{-3}m^2$	Área do êmbolo
$V_{a0} = 6,234.10^{-4}m^3; V_{b0} = 5,606.10^{-4}m^3$	Volume inicial das câmaras A e B
$p_{sup} = 7.10^5Pa$	Pressão de suprimento
$p_{atm} = 1.10^5Pa$	Pressão atmosférica

## 4 Resultados Teóricos e Experimentais

A Tabela 1 apresenta os valores dos parâmetros da plataforma girante e os valores dos parâmetros obtidos para o modelo matemático do atuador pneumático adotado.

O modelo de 5ª ordem representado pelas equações (15,16,17,18,19) foi implementado por meio de um diagrama de blocos. A simulação foi feita com o auxílio da ferramenta computacional Matlab/Simulink, utilizando-se o método ODE4 (Rung Kutta) com passo de 0.0001 segundos, com tempo de simulação de 10 segundos, em malha aberta, que consiste em um sistema que não possui realimentação. A Figura 4 apresenta os resultados computacionais e de validação experimental do modelo proposto para uma dada trajetória senoidal desejada com um controlador proporcional com ganho de 0,3; onde foi montado na bancada o sistema de separação de grãos de uma colhedora autopelida.

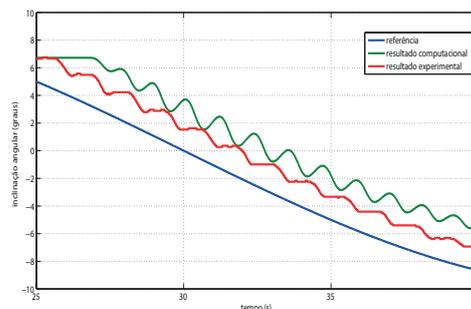


Figura 4: Resultado experimental e computacional com controle clássico.

Os resultados comparativos da simulação computacional e da validação experimental ilustram as características do modelo matemático desenvolvido e mostram que o modelo adotado é adequado, entretanto ficou evidenciado que existe a necessidade de um controlador mais eficiente de forma a compensar as características não lineares e minimizar seus efeitos que prejudicam o desempenho do sistema.

## 5 Conclusões

A aquisição de dados através de testes experimentais realizados com auxílio de uma bancada de simulação de aclives foi fundamental para o desenvolvimento e a validação do modelo matemático representativo do movimento de inclinação lateral da bancada construída para o ensaio dinâmico de equipamentos agrícolas. Através dos resultados obtidos mostrou-se a validade da implementação computacional do modelo proposto, podendo ser aplicado por exemplo na simulação de uma aplicação de controle automático de nivelamento de sistemas de separação de grãos e palha em uma colheitadeira autopropelida.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. Os autores também agradecem à CAPES, à FAPERGS e à UNIJUÍ pelo apoio e incentivo na realização da pesquisa, além da infraestrutura de laboratórios do Núcleo de Inovação em Máquina Automáticas e Servo Sistemas (NIMASS), implantado com recursos provenientes do SEBRAE e do FINEP/SEBRAE/MCT no projeto Kit Colheitadeira e credenciado pela Agência Nacional de Petróleo (ANP) em 13 de outubro de 2014 (portaria no. 1.542 do D.O.U).

## Referências

- [1] M. R. M. H. Porsch, M.F. Gonçalves, A. C. Valdiero, L.A. Rasia and D. Ritter. Validação Experimental do Modelo Matemático de uma Bancada Acionada Pneumaticamente para Simulação de Terrenos Inclinados. In *Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (XXXIV CNMAC)*, pages 1334-1335, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil, 2012.
- [2] M. R. M. H. Porsch, A. C. Valdiero, M.F. Gonçalves, L.A. Rasia and D. Ritter. Modelagem matemática de uma Bancada Experimental Acionada Pneumaticamente para Simulação de Aclives de Terrenos. In *Proceeding of the 10th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications (DINCON 2011)*, pages 676-679, 2011. DOI: 10.5540/DINCON.2011.001.1.0172.
- [3] A. C. Valdiero, C.S. Ritter, C.F. Rios, and M. Rafikov. NonLinear Mathematical Modeling in Pneumatic Servo Position Applications. In *Mathematical Problems in Engineering*, pages 1-16, 2011.
- [4] A.C. Valdiero, D. Bavaresco, P.L. Andrighetto. Experimental Identification of the Dead Zone in Proportional Directional Pneumatic Valves, *International Journal of Fluid Power*, volume 9, pages 27-34, 2008.
- [5] P. Dupont, B. Armstrong, V. Hayward. Elasto-plastic friction model: contact compliance and stiction. *ACC, American Control Conference, Illinois* pages 1072-1077, 2000.