

Modelo matemático para populações de *Aedes* spp. com oviposição em ambientes aquáticos e secos

Alessandra A. C. Alves¹

José L. A. Fernandes²

CEFET-MG, Belo Horizonte, MG

Lillia dos S. B. Silva³

SEMED/Prefeitura Municipal de Sabará, Sabará, MG

Álvaro E. Eiras⁴

UFMG, Belo horizonte, MG

Resumo. O *Aedes aegypti* e o *Aedes albopictus* são os principais vetores transmissores de arboviroses no mundo como a dengue, zika, febre de chikungunya e a febre amarela, com maior incidência global desses vetores em regiões tropicais. A pluviosidade exerce considerável influência no desenvolvimento do *Aedes* spp., favorecendo o aumento do número de criadouros disponíveis para postura de ovos, ocasionando correlação positiva com a incidência de doenças. Um estudo teórico-numérico-computacional do modelo proposto, foi realizado com a finalidade de reproduzir a dependência dos parâmetros entomológicos com a pluviosidade acumulada semanalmente de uma determinada região, para investigar a relação entre a escolha do local de oviposição pela fêmea do mosquito, que pode ocorrer em ambientes secos ou aquáticos, e como essa escolha pode impactar na população de fêmeas. O sistema possui três equações diferenciais não lineares que representa a dinâmica das populações de ovos em ambientes secos e aquáticos e a população de fêmeas sob efeito de variáveis pluviométricas, sendo validado através da comparação com dados experimentais de capturas obtidos pelo monitoramento entomológico da cidade de Caratinga, Minas Gerais, Brasil. Verificou-se que o modelo descreve o ciclo de vida do mosquito, sendo capaz de auxiliar no controle e monitoramento do *Aedes*.

Palavras-chave. *Aedes* spp., Sistema Dinâmico, Oviposição, Pluviosidade

1 Introdução

A incidência de arboviroses como a dengue, zika e febre de chikungunya transmitidas pelo *Aedes* spp. aumentou drasticamente nas últimas décadas, sendo que 99% dessas doenças são causadas pelo *Aedes aegypti* e o *Aedes albopictus*, com maior incidência em áreas tropicais e subtropicais em todo o planeta segundo a OMS. As mudanças no clima, urbanização desordenada, o aumento de movimentações de pessoas e mercadorias e a falta de métodos eficazes de estratégias de controle são fatores que contribuem para a transmissão de doenças [14].

Estudos mostram que o ciclo de vida do *Aedes* spp. é influenciado pela temperatura, umidade [6] e chuvas [9], onde a fêmea adulta após o repasto sanguíneo segue em busca de um habitat adequado para efetuar a postura de ovos, que poderá ocorrer em ambientes secos ou aquáticos, com a possível eclosão dos ovos dependente de condições climáticas [5]. Em períodos chuvosos a fêmea

¹alessandraangelita@gmail.com.

²acebal@cefetmg.br

³lilliabarsante@gmail.com.

⁴alvaro@icb.ufmg.br.

do mosquito encontra uma quantidade maior de água parada para depositar seus ovos, o ambiente urbano propicia o desenvolvimento do vetor com o aumento de criadouros artificiais, favorecendo a eclosão desses ovos livremente no verão [2]. As características dos locais podem desempenhar um importante papel no critério de escolha da oviposição. Em condições de temperaturas mais elevadas, acima de 35°C, há uma diminuição na taxa de oviposição, enquanto que em condições de umidade mais alta há um aumento na postura de ovos e o comportamento dessa oviposição pode exercer influência na transmissão de doenças e pode ser significativo na criação de técnicas de vigilância e controle ([3], [7]).

Modelos matemáticos relacionados a variáveis climáticas associadas ao ciclo de vida do mosquito, vem sendo desenvolvidos para auxiliar na prevenção e controle do vetor transmissor da doença, fornecendo uma aproximação simplificada a fim de descrever a dinâmica populacional do vetor em áreas urbanas, dentre esses trabalhos podemos citar ([1], [11], [12], [13], [15]).

Neste trabalho, pesquisaremos em que medida a postura de ovos pela fêmea do mosquito em ambientes aquáticos e em ambientes secos, é capaz de modular a população alada e contribuir para descrever a sazonalidade do ciclo de vida do vetor, sendo que os ovos podem durar mais de um ano em condições climáticas desfavoráveis para o seu desenvolvimento entrando no processo de quiescência. A compreensão do processo de oviposição do *Aedes* spp. mais especificamente a compreensão da resistência à dessecação do ovo, pode fornecer informações sobre sua ecologia, dinâmica populacional, o momento adequado para efetuar mecanismos de controle além de considerar medidas de biossegurança [10]. Para isso, propomos e validamos um modelo matemático computacional que modela as populações de ovos e a população de fêmeas após o repasto sanguíneo com dependência pluviométrica.

2 Modelagem

Este modelo tem por objetivo descrever a dinâmica da oviposição da fêmea do *Aedes* spp., bem como o processo de escolha do local para efetuar a postura de ovos, como ambientes aquáticos e ambientes secos. Por simplicidade, a população aquática do mosquito foi reduzida apenas a população de ovos. O modelo é representado por um sistema dinâmico com três compartimentos e dependência pluviométrica:

$$\frac{dE_W}{dt} = \phi_W(p(t)) \left(1 - \frac{E_W}{C} \right) F - (\mu_{E_W}(p(t)) + \alpha(p(t)) + \zeta_{E_W}(t)) E_W \quad (1)$$

$$\frac{dE_D}{dt} = \phi_D(p(t)) \left(1 - \frac{E_D}{C} \right) F - (\mu_{E_D}(p(t)) + \alpha(p(t)) + \zeta_{E_D}(t)) E_D \quad (2)$$

$$\frac{dF}{dt} = \alpha(p(t))(E_W + E_D) - (\mu_F(p(t)) + \zeta_F(t)) F. \quad (3)$$

A definição com sentido biológico para a região do espaço de estados do sistema dinâmico é:

$$\Psi = \{ (E_W, E_D, F) \in \mathbb{R}_+^3 \mid E_W \geq 0; E_D \geq 0; F \geq 0; 0 < E_W < C \text{ e } 0 < E_D < C \}.$$

Com isso, as populações de fêmeas após o repasto sanguíneo são não negativas e as populações de ovos não ultrapassam a capacidade de suporte do ambiente.

A equação (1) descreve as populações de ovos em ambientes aquáticos $E_W(t)$, a equação (2) descreve as populações de ovos em ambientes secos $E_D(t)$ e a equação (3) descreve a população de fêmeas após o repasto sanguíneo $F(t)$. Os parâmetros entomológicos relacionados às taxas de mortalidade natural per capita dos ovos nos ambientes aquoso e seco serão dadas respectivamente

por μ_{E_W} e μ_{E_D} . A taxa de mortalidade per capita dos mosquitos fêmeas dada por μ_F . A taxa de oviposição em ambiente aquoso por unidade de fêmea é representada por $\phi_W(1 - \frac{E_W}{C})$, onde ϕ_W é a taxa de oviposição intrínseca em ambiente aquoso, e a taxa de oviposição em ambiente seco por unidade de fêmea é representada por $\phi_D(1 - \frac{E_D}{C})$, onde ϕ_D é a taxa de oviposição intrínseca em ambiente seco, C é a capacidade de suporte do ambiente. As populações de ovos E_W e E_D desenvolvem-se a uma taxa per capita α e ζ_{E_W} , ζ_{E_D} e ζ_F representam as taxas de mortalidade adicional per capita devido a adição de controle na respectiva população.

A taxa líquida de reprodução básica do modelo proposto neste trabalho é representada por $Q_0 = Q_W + Q_D$, cuja equação é:

$$Q_0 = \frac{\phi_W \alpha}{(\mu_F + \zeta_F)(\alpha + \mu_{E_W} + \zeta_{E_W})} + \frac{\phi_D \alpha}{(\mu_F + \zeta_F)(\alpha + \mu_{E_D} + \zeta_{E_D})}. \quad (4)$$

O modelo possui um ponto de equilíbrio trivial, que trata-se do equilíbrio onde não há populações de mosquitos

$$P_0 = (E_W^*, E_D^*, F^*) = (0, 0, 0),$$

e dois pontos de equilíbrio não triviais, cujos pontos de equilíbrio em função de (4) são:

$$P_1 = (E_W^{**}, E_D^{**}, F^{**})$$

em que

$$E_W^{**} = \frac{C}{2} \left(\frac{-(Q_0 - 2Q_W + 2Q_W^2) + \sqrt{(Q_0 - 2Q_W)^2 + 4Q_W^2(Q_0 - Q_W)^2}}{Q_W(Q_0 - 2Q_W)} \right)$$

$$E_D^{**} = \left(\frac{1}{Q_W \left(1 - \frac{E_W^{**}}{C}\right)} - 1 \right) E_W^{**} \quad \text{e} \quad F^{**} = \frac{\alpha(E_W^{**} + E_D^{**})}{(\mu_F + \zeta_F)}$$

e

$$P_2 = (E_W^{***}, E_D^{***}, F^{***})$$

em que

$$E_W^{***} = \frac{C}{2} \left(\frac{-(Q_0 - 2Q_W + 2Q_W^2) - \sqrt{(Q_0 - 2Q_W)^2 + 4Q_W^2(Q_0 - Q_W)^2}}{Q_W(Q_0 - 2Q_W)} \right)$$

$$E_D^{***} = \left(\frac{1}{Q_W \left(1 - \frac{E_W^{***}}{C}\right)} - 1 \right) E_W^{***} \quad \text{e} \quad F^{***} = \frac{\alpha(E_W^{***} + E_D^{***})}{(\mu_F + \zeta_F)}.$$

O ciclo de vida do *Aedes* spp. apresenta uma grande sensibilidade à presença de chuvas, produzindo consideravelmente muitos indivíduos. Contudo, para maiores volumes de chuvas, a população não conserva a mesma sensibilidade. Devido a isso, uma lei de potência [12] foi atribuída à dependência das taxas de oviposição, da taxa de desenvolvimento e das taxas de mortalidade do vetor com a chuva. Para efeito de simplificação, consideramos o mesmo valor r para a potência dos parâmetros ϕ_W , ϕ_D , α , μ_{E_W} , μ_{E_D} e μ_F . Este valor foi estimado pelo erro quadrático médio s^2 existente entre os dados simulados de fêmeas após o repasto sanguíneo e dados amostrais de Índice Médio de Fêmeas *Aedes* - IMFA concernente ao cenário de estudo da respectiva cidade.

3 Resultados

As simulações do sistema dinâmico proposto neste trabalho foram obtidas numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem no software MATLAB[®]. O modelo sem intervenção de controle foi validado comparando os dados obtidos pela simulação computacional, com os dados reais de Índice Médio de Fêmeas *Aedes* - IMFA e de precipitação acumulada p (mm) por semana epidemiológica (SE), as amostras de dados utilizadas de precipitação acumulada foram relativas a SE (9 - 52) de 2009 a SE (1 - 52) de 2010 da cidade de Caratinga, Minas Gerais, Brasil, provenientes do Banco de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa - BDMEP, do Instituto Nacional de Meteorologia - INMET. Foram utilizadas como condição inicial as coordenadas do ponto de equilíbrio não trivial da primeira semana epidemiológica do cenário de pesquisa e não foram utilizadas ações de controle extra nas populações do vetor ($\zeta_{E_W}(t) = \zeta_{E_D}(t) = \zeta_F(t) = 0$). As faixas dos parâmetros utilizados no modelo estão representados na Tabela 1, o parâmetro C foi considerado constante no decorrer de todo o cenário de estudo, estimando seu valor como $C = 1$.

Tabela 1: Faixas dos parâmetros entomológicos do *Aedes* empregados nas equações do modelo proposto.

Parâmetro	Faixa	Referência	Unidade
ϕ_W	0,5680 – 6,3616	Estimada	dia ⁻¹
ϕ_D	0,4320 – 4,8384	Estimada	dia ⁻¹
μ_F	0,033 – 0,046	Estimada	dia ⁻¹
α	0,05 – 0,19	Estimada	dia ⁻¹
μ_{E_W}	0,0053 – 0,0098	Estimada	dia ⁻¹
μ_{E_D}	0,0044 – 0,0161	Estimada	dia ⁻¹

Os critérios de Routh-Hurwitz para o modelo, foram verificados computacionalmente no horizonte de estudo, resultando em (i) o ponto de equilíbrio não trivial P_1 será estável, uma vez que, todos os coeficientes (a_0, a_1, a_2 e a_3) e o determinante $\Delta = a_1a_2 - a_3$ possuem valores positivos; (ii) o ponto de equilíbrio trivial P_0 será instável, uma vez que, apenas os coeficientes a_0 e a_1 são positivos; e (iii) o ponto de equilíbrio não trivial P_2 será instável, uma vez que, o coeficiente a_2 e o determinante $\Delta = a_1a_2 - a_3$ são negativos.

A Figura 1 mostra o progresso de s^2 , o erro quadrático médio em função da potência r do modelo proposto, com $r \in [0, 1 - 1, 0]$ e passo $h = 0,01$. Nesse intervalo, os valores da potência r que reduzem o s^2 estão relacionados as defasagens de duas e três semanas para a cidade de Caratinga. Para avaliar a dinâmica da população do vetor, foi considerada a potência r relativa ao menor valor de s^2 , correspondente a três semanas do cenário de estudo da cidade em questão. O valor do erro quadrático médio encontrado foi $s^2 = 1,94877.10^{-3}$ e o valor da potência $r = 0,39$.

As Figuras 2, 3 e 4 mostram a evolução temporal da dinâmica evolutiva das populações de ovos em ambiente aquático $E_W(t)$, ambiente seco $E_D(t)$ e fêmeas após o repasto sanguíneo $F(t)$ onde os picos e vales das populações coincidem com os picos e vales de pluviosidade p (mm), mostrando a influência da chuva no ciclo evolutivo do *Aedes* spp. Em períodos de estiagem prolongada, as populações sofrem um declínio considerável, porém não chegam a extinguir-se, provavelmente isso deve-se a resistência a dessecação dos ovos e a existência de potenciais criadouros artificiais do mosquito nesse intervalo de tempo. O caso da evolução das populações de ovos estarem equiparadas, pode estar ligado ao fato de termos considerado por simplicidade o mesmo valor para a taxa de desenvolvimento do vetor da fase aquática para a alada.

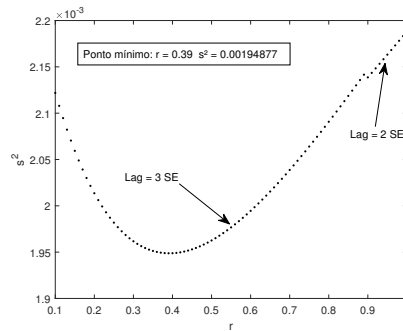


Figura 1: Dependência do erro quadrático médio s^2 e da defasagem (Lag) d , com a potência r do modelo proposto para a cidade de Caratinga, Minas Gerais, Brasil.

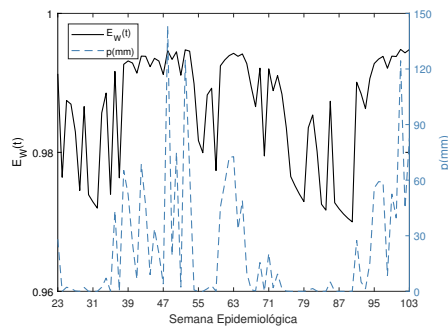


Figura 2: Curva da evolução da população de ovos em ambiente aquático $E_W(t)$ de acordo com a pluviosidade p (mm).

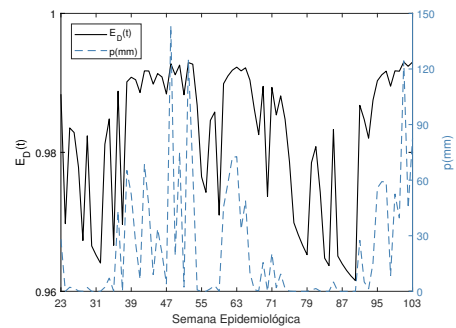


Figura 3: Curva da evolução da população de ovos em ambiente seco $E_D(t)$ de acordo com a pluviosidade p (mm).

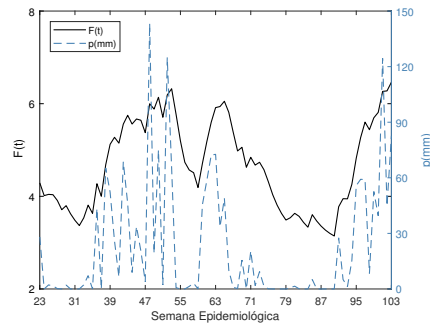


Figura 4: Curva da evolução da população de mosquitos fêmeas $F(t)$ após o repasto sanguíneo de acordo com a pluviosidade p (mm).

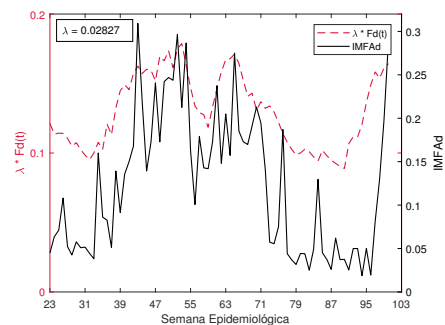


Figura 5: Dados amostrais de Índice Médio de Fêmeas *Aedes*, com defasagem calculada a partir da correlação cruzada e do fator escala λ .

A Figura 5 mostra a comparação qualitativa entre os dados simulados de fêmeas após o repasto sanguíneo do modelo proposto e os dados amostrais de IMFA, com a defasagem calculada a partir da correlação cruzada entre os dados e do fator escala $\lambda = 0,02827$, que é um fator positivo que ajusta verticalmente a escala relativa dos dados simulados de fêmeas após o repasto sanguíneo com

dados amostrais de IMFA após a correlação cruzada. A evolução da população de fêmeas após o repasto sanguíneo do modelo seguiu a tendência de evolução de IMFA com um atraso médio entre os picos e os vales de três semanas epidemiológicas para a cidade de Caratinga com o valor máximo da correlação equivalente a $M = 0,73783$. De acordo com a classificação de [4], temos que a intensidade M das correlações entre duas sequências foi forte para a cidade de Caratinga.

Para fins de comparação, iremos contrapor o resultado alcançado relacionado ao menor valor do erro quadrático médio s^2 do modelo proposto neste trabalho com os trabalhos de [1] e [11]. Foram realizadas simulações numéricas sem ação de controle adicional nas populações dos respectivos modelos entomológicos, utilizando dados amostrais de IMFA e de precipitação acumulada p (mm) por semana epidemiológica (SE) no cenário de pesquisa na cidade de Caratinga. A Tabela 2 mostra a comparação entre o valor do erro quadrático médio s^2 e da defasagem d obtidos entre os dados de IMFA e os dados simulados de fêmeas após o repasto sanguíneo do modelo em estudo e dos modelos matemáticos entomológicos: [1] e (1), (15) e (29) do trabalho de [11]. O menor valor do s^2 foi obtido na simulação do modelo (29) de [11] com um atraso médio entre as curvas de três semanas e o pior valor foi obtido na simulação do modelo de [1] com um atraso médio entre as curvas de uma semana.

Tabela 2: Comparação do erro quadrático médio s^2 e da defasagem d obtidos a partir dos dados amostrais de Índice Médio de Fêmeas *Aedes* e os dados simulados de fêmeas após o repasto sanguíneo dos modelos [1] e (1), (15) e (29) do trabalho de [11] para a cidade de Caratinga, Minas Gerais, Brasil.

Modelo	Valor de s^2	Valor de d
(Modelo proposto)	$1,94877 \cdot 10^{-3}$	3 SE
(1) de [11]	$1,20324 \cdot 10^{-3}$	4 SE
(15) de [11]	$1,40502 \cdot 10^{-3}$	3 SE
(29) de [11]	$1,16499 \cdot 10^{-3}$	3 SE
[1]	$3,39340 \cdot 10^{-3}$	1 SE

4 Conclusões

Neste trabalho, mostramos um estudo teórico-numérico-computacional de um modelo matemático compartimental não linear, que descreve a dependência dos parâmetros entomológicos relacionados ao ciclo de vida do *Aedes* spp. em relação ao processo de escolha do ambiente de oviposição com a dependência pluviométrica acumulada semanalmente de uma determinada região. A implementação do modelo proposto e seus resultados, foram comparados com dados amostrais de IMFA da cidade de Caratinga, Minas Gerais, Brasil, correspondendo as expectativas de que o modelo tem um comportamento semelhante ao esperado para a evolução no desenvolvimento do vetor. Com isso o modelo poderá especificar a população, contribuindo para relatar as flutuações sazonais no ciclo de vida do mosquito. Como trabalhos futuros, acrescentaremos nos parâmetros do modelo proposto a influência da temperatura, além de ações de controle do *Aedes* spp. e o refinamento das faixas dos parâmetros entomológicos.

Referências

- [1] Barsante, L. D. S. Dependência entre pluviosidade e população de fêmeas *Aedes aegypti* grávidas descritas através de um sistema dinâmico não linear, Dissertação de Mestrado, CEFET-MG, 2012.

- [2] Corrêa, F. V. e Palhares, J. M. Aumento de casos de dengue relacionados com fatores climáticos e o meio socioambiental no município de Oiapoque-AP-Brasil: período de 2008 a 2013, *Ciência Geográfica*, 20(1):58–70, 2016.
- [3] Costa, E. A. P. D. A., Santos, E. M. D. M., Correia, J. C. and Albuquerque, C. M. R. D. Impact of small variations in temperature and humidity on the reproductive activity and survival of *Aedes aegypti* (Diptera, Culicidae), *Revista Brasileira de Entomologia*, SciELO Brasil, 54(3):488–493, 2010. DOI: 10.1590/S0085-56262010000300021.
- [4] Dancey, C. P. and Reidy, J. *Statistics without maths for psychology, 7th Edition*. Pearson education, New York, 2017.
- [5] Mullen, G. R. and Durden, L. A. *Medical and veterinary entomology, 3rd Edition*. Academic press, 2019.
- [6] Reinhold, J. M., Lazzari, C. R. and Lahondère, C. Effects of the Environmental Temperature on *Aedes aegypti* and *Aedes albopictus* Mosquitoes: A review, *Insects*, 9(4):158, 2018. DOI: 10.3390/insects9040158.
- [7] Rey, J. R. and O’Connell, S. M. Oviposition by *Aedes aegypti* and *Aedes albopictus*: Influence of congeners and of oviposition site characteristics, *Journal of Vector Ecology*, Wiley Online Library, 39(1):190-196, 2014.
- [8] Rodrigues, H. S., Monteiro, M. T. T. and Torres, D. F. M. Sensitivity analysis in a dengue epidemiological model, *Conference papers in science*, volume 2013, Hindawi, 2013. DOI: 10.1155/2013/721406.
- [9] Santos, I. C. D. S., Braga, C., De Souza, W. V., De Oliveira, A. L. S. and Regis, L. N. The influence of meteorological variables on the oviposition dynamics of *Aedes aegypti* (Diptera: Culicidae) in four environmentally distinct areas in northeast Brazil, *Memórias do Instituto Oswaldo Cruz*, volume 115, 2020. DOI: 10.1590/0074-02760200046.
- [10] Silva, H. H. G. D. e Silva, I. G. D. Influência do período de quiescência dos ovos sobre o ciclo de vida de *Aedes aegypti* (Linnaeus, 1762)(Diptera, Culicidae) em condições de laboratório, *Revista da Sociedade Brasileira de Medicina Tropical*, 32(4):349–355, 1999. DOI: 10.1590/S0037-86821999000400003.
- [11] Silva, L. D. S. B. Proposição e análise de modelos determinísticos com parâmetros meteorológicos para descrição da população de mosquitos *Aedes* Spp. e otimização da eficácia do controle entomológico. Tese de Doutorado, CEFET-MG, 2018.
- [12] Silva, L. D. S. B., Vasconcelos, A. S. V., Sanches, A. L., Cardoso, R. T. N., Fernandes, J. L. A. e Eiras, A. E. Otimização mono-objetivo no controle do mosquito *Aedes aegypti* por meio de um modelo de duas populações com influência da precipitação, *TEMA (São Carlos)*, SciELO Brasil, 20(1):197–216, 2019. DOI: 10.5540/tema.2019.020.01.0197.
- [13] Valdez, L. D., Sibona, G. J., and Condat, C. A. Impact of rainfall on *Aedes aegypti* populations, *Ecological Modelling*, Elsevier, 385:96–105, 2018. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2018.07.003.
- [14] WHO & IAEA. Guidance framework for testing the sterile insect technique as a vector control tool against *Aedes*-borne diseases, *Geneva: World Health Organization and the International Atomic Energy Agency*, 2020. Licence: CC BY-NC SA 3.0 IGO.
- [15] Yang, H. M. Assessing the influence of quiescence eggs on the dynamics of mosquito *Aedes aegypti*, *Applied Mathematics*, Scientific Research Publishing 5(17):2696–2711, 2014. DOI: 10.4236/am.2014.517257.