Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicações de Álgebra Linear em Geometria Fractal

Luigi Henrique Gomes Braga[1]
UNESP "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, SP
Tatiana Miguel Rodrigues de Souza[2]
UNESP "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, SP

A utilização de Álgebra Linear na construção de fractais do tipo IFS (Sistema de Funções Iteradas), facilita a implementação na computação. Mostraremos as transformações para o Triângulo de Sierpinski. Antes de iniciarmos as aplicações, definiremos os conceitos dentro da Álgebra Linear das transformações de Homotetia (H), Rotação (R) e Translação (T) que serão utilizadas na construção dos fractais. Logo, o objetivo deste trabalho é estudar uma classe de fractais usando transformações lineares.

Seja C um conjunto limitado de pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$, então definiremos as transformações $H(C)$, $R(C)$ e $T(C)$.

a) Homotetia

Para uma razão de semelhança s, definiremos a transformação $H_s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como:

$$H_s = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = s \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A homotetia de razão de semelhança s é chamada de dilatação quando $s > 1$ e de contração quando $0 < s < 1$. Na geração de fractais temos sempre a contração com $s = \frac{1}{r}$, onde r é fator de redução utilizado.

b) Rotação

Para um ângulo de rotação θ definiremos a transformação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por:

$$R_\theta \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta & -y\sin\theta \\ x\sin\theta & y\cos\theta \end{bmatrix}.$$

c) Translação

Para um ponto (a, b) definiremos a transformação $T_{(a,b)}$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por:

$$T_{(a,b)} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}.$$

Definiremos a transformação $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como a aplicação simultânea de H, R e T a um conjunto C como:

$$S = T_{(a,b)} \circ R_\theta \circ H_s, \text{ isto é, } S \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = s \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

A transformação S será o gerador dos objetos classificados como fractais de funções iteradas, onde a cada iteração dada aplicamos à transformação S.

Utilizando um triângulo isósceles como figura básica. Seja S_0 um triângulo isósceles conforme a Figura 1 de lado medindo L.

[1]l.braga@unesp.br
[2]tatiana.rodrigues@unesp.br

 © 2021 SBMAC

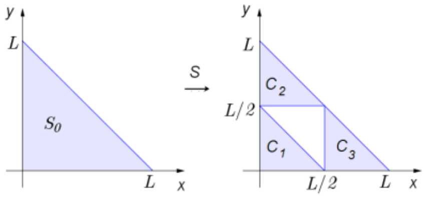

Figura 1: Nível 2

A transformação S sobre S_0 com um fator de redução $r = 2$ será definida como o conjunto união dos 3 conjuntos C_1, C_2 e C_3:

$$S_1 = C_1 \cup C_2 \cup C_3, \text{ onde, } C_1 = H_{1/2}(S_0), \; C_2 = H_{(1/2)} \circ T_{\left(0,\frac{L}{2}\right)}(S_0), \; C_3 = H_{(1/2)} \circ T_{\left(\frac{L}{2},0\right)}(S_0),$$

onde H e T são transformações definidas anteriormente em (a) e (b). Então para o Triângulo de Sierpinski temos:

$$C_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}, \; C_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

No nível 1 (primeira iteração): $S_1 = S(S_0)$, No nível 2 (segunda iteração): $S_2 = S(S_1) = S^2(S_0)$, No nível 3: (segunda iteração): $S_3 = S(S^3) = S^3(S_0)$, No nível n : $S_n = S(S_{(n-1)}) = S^n(S_0)$.

Na Figura 2 mostramos a transformação S aplicada 4 vezes ao triângulo S_0.

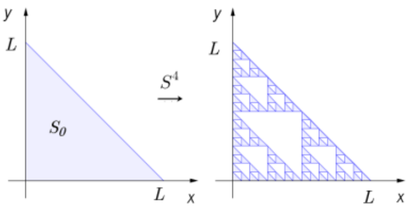

Figura 2: Nível 4

Portanto, usando homotetia e translação, criou-se um fractal clássico da Geometria Fractal.

Referências

[1] Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Ribeiro, V. R. and Wetzler, H. G. *Álgebra Linear e Aplicações, 3a. edição.* Harbra, São Paulo, 1984.

[2] Rabay, Y. S. F. *Estudos e Aplicações da Geometria Fractal.*. Tese (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, UFPB, Paraíba, p.89. 2013.

[3] Barbosa, R. M. *Descobrindo a Geometria Fractal - para a sala de aula, 3a. edição*, Autêntica Editora, Belo Horizonte, 2005.

© 2021 SBMAC