

Um estudo da transformação do gato de Arnold: imagens definidas em um mapa de pixels

Allan H. Tanaka¹

UNESP, Bauru, SP

Wanderley S. F. Júnior²

UNESP, Bauru, SP

Vanessa Botta³

FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP

Este trabalho se propõe a analisar a transformação do gato de Arnold e sua periodicidade sobre imagens definidas em um Mapa de Pixels, uma importante ferramenta utilizada em modelos físicos, criptografia e computação gráfica. O título da transformação é em reconhecimento ao matemático russo Vladimir Igorevich Arnold (1937 - 2010) que utilizou o esboço da imagem de seu gato para descrever tal aplicação (mais detalhes na referência [3]). A transformação é baseada em iterações de uma imagem por meio de aritmética modular e Álgebra Linear, reorganizando cada um de seus pixels de maneira aparentemente desorganizada, de forma que, ao aplicar repetidas vezes tal transformação, a imagem retorna ao seu estado original. Considerando aplicações na criptografia, por exemplo, é possível criptografar e descriptografar imagens através da aplicação da transformação do gato de Arnold, uma vez que tendo uma imagem modificada, só é possível retorná-la ao seu estado original conhecendo a aplicação e o seu período $\Pi(p)$ [1].

A transformação do gato de Arnold é definida pela aplicação: $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde:

$$\Gamma \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \pmod{1}. \quad (1)$$

De acordo com [1], tais pares ordenados $(x, y) \pmod{1}$ são pontos no quadrado unitário S , isto é, o domínio da nossa função Γ é $[0,1) \times [0,1) \subset \mathbb{R}^2$. A partir de (1) podemos expressar a transformação do gato de Arnold como um cisalhamento na direção de x , seguido de um cisalhamento na direção y ; como estamos trabalhando na aritmética $\pmod{1}$, a aplicação Γ leva todos os pontos no quadrado unitário S , nos permitindo controlar o domínio da função, sendo que chamamos a aplicação da função Γ de iteração. É possível relacionar o cisalhamento das iterações de Γ com a Decomposição LU em (1):

$$\Gamma \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \pmod{1}.$$

Como a transformação do gato de Arnold trabalha com imagens em S , é possível associar um par ordenado a cada pixel da imagem do quadrado unitário. A aplicação Γ da transformação do gato de Arnold, a cada iteração, modifica a posição dos pontos em S . Ocorre que cada ponto de pixel da imagem de S retorna a sua posição inicial após n iterações, e não antes. Neste sentido,

¹Mestrando em Matemática Aplicada, e-mail: allan.tanaka@unesp.br

²Mestrando em Matemática Aplicada, e-mail: wanderley.ferreira@unesp.br

³E-mail: vanessa.botta@unesp.br

dizemos que o ponto de pixel tem período n , e chamamos de $\Pi(p)$ o período do mapa de pixels, isto é, o número de iterações necessárias de Γ para que o mapa retorne a sua posição inicial.

Ainda de acordo com a referência [1], tomando um ponto qualquer (a, b) no quadrado unitário S , dizemos que o ponto é racional se as coordenadas a e b são números racionais, e o ponto é irracional se pelo menos uma das coordenadas é um número irracional. Por meio das iterações da transformação do gato de Arnold, os pontos racionais tem comportamento periódico em S , enquanto os pontos irracionais de S são não periódicos, de modo que conforme as iterações são feitas em pontos irracionais, obtemos sempre pontos distintos em S . Considerando tais características dos pontos de pixel de S , é possível definir um conjunto denso em S .

Através das considerações anteriores, a transformação do gato de Arnold pode ser entendida como um sistema dinâmico caótico, sendo possível mostrar a sensibilidade às condições iniciais do sistema, conforme definição de caos de Robert L. Devaney [2]. O estudo da transformação do gato de Arnold tem por objetivo compreender as alterações causadas no mapa de pixels em S a cada iteração, e quais são as consequências das alterações das condições iniciais do sistema. Por possuir características caóticas, a transformação do gato de Arnold se torna uma importante ferramenta, podendo ser utilizada na já mencionada criptografia, ou em modificações gráficas em imagens, possuindo uma gama de aplicações que podem ser estudadas na abordagem aqui proposta.

Referências

- [1] Anton, H., Rorres, C. *Álgebra Linear com Aplicações, 8a. edição*. Bookman, Porto Alegre, 2001.
- [2] Brandão, D. L. Sobre o Caos de Devaney e Implicações. Dissertação de Mestrado, Unesp, 2019.
- [3] Peterson, G. *Arnold's Cat Map*, College of the Redwoods, 3:4, 1997. DOI:10.3840/002296.