Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Soluções para problemas de equilíbrio econômico e suas extensões via os algoritmos FDIPA e FDA-NCP

Sandro R. Mazorche[1]
Departamento de Matemática, UFJF, Juiz de Fora, MG
Felipe T. Ferreira[2]
UFJF, Juiz de Fora, MG

A partir de estudos anteriores do algoritmo FDIPA (Feasible Directions Interior Point Algorithm), como em [1], iniciamos o estudo de modelos matemáticos mais aplicados. Destacamos o Problema de Equilíbrio de Nash-Cournot, conforme descrito em [2] como: um ambiente não-cooperativo de mercado onde N firmas vendem um mesmo produto, $P(Q)$ denotando o preço de compra do consumidor dada uma quantidade total $Q = \sum_{j=1}^{N} q_j$ disponível no mercado e $C_i(q_i)$ o custo de produção da i-ésima firma, que produz uma quantidade q_i. Supondo que o sistema possuí solução $q^* = (q_1^*, ..., q_N^*)$ única, este é um problema multiobjetivo onde buscamos minimizar simultaneamente o custo de produção de cada uma das N firmas.

Naquele mesmo trabalho, percebemos uma equivalência entre abordagens por minimização e complementaridade, permitindo tanto a implementação via algoritmo FDIPA quanto via algoritmo de complementaridade não linear, o FDA-NCP apresentado em [4]. Assim, o mesmo problema pôde ser abordado por duas formulações diferentes, e por algoritmos diferentes. Isso facilitou o estudo de um modelo mais elaborado, o Problema de Equilíbrio de Stackelberg-Nash-Cournot ou Problema do Líder: uma firma adicional atua como líder e busca o valor ótimo - de menor custo - ciente da produção das firmas associadas, conforme descrito em [3].

$$\text{PL: minimizar}_{x \geq 0} \big\{ C_0(x) - x \cdot P\big[x + Q^*\big] \big\}, \quad \text{onde} \quad Q^* = \sum_{j=1}^{N} q_j^* \tag{1}$$

Com restrição de complementaridade, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$

$$\begin{aligned} F_i(x,q) = P\left(x + q_i + \sum_{j \neq i}^{N} q_j\right) + q_i \cdot \frac{\partial P}{\partial q_i}\left(x + q_i + \sum_{j \neq i}^{N} q_j\right) - \frac{dC_i}{dq_i}(q_i) \geq 0 \ \text{ e } \ q_i \geq 0 \\ F_i(x,q) \cdot q_i = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Os problemas (1) e (2) em programação matemática são chamados também de "problemas de programação em dois níveis": o primeiro nível em (1), é um problema de minimização e o segundo nível em (2), é um problema de complementaridade. Nossa proposta é aplicar o FDIPA em (1) e o FDA-NCP em (2). A grande dificuldade então é que as variáveis $q = (q_1, q_2, ..., q_N)$ dependem da variável do Líder x. Assim, calcular $\frac{dq}{dx}$ não é trivial. Nossa proposta se baseia em duas estimativa para $\frac{dq}{dx}$, uma por diferenças finitas e outra proveniente do algoritmo FDA-NCP, que permitiu obtermos a seguinte fórmula

$$\frac{dq}{dx} = \frac{-1}{1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i \cdot q_i}{F_i + \alpha_i \cdot q_i}} \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 \cdot q_1}{F_1 + \alpha_1 \cdot q_1} \\ \vdots \\ \frac{\beta_N \cdot q_N}{F_N + \alpha_N \cdot q_N} \end{bmatrix} \tag{3}$$

[1] sandro.mazorche@ufjf.edu.br
[2] felifeheirr@gmail.com

onde

$$\alpha_i = \frac{d^2C_i}{dq_i^2} - \frac{\partial P}{\partial q_i} \quad \text{e} \quad \beta_i = -\frac{\partial P}{\partial q_j} - q_i \frac{\partial^2 P}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}, \quad j \neq i. \tag{4}$$

Apresentamos abaixo testes em um modelo com 5 firmas [2] e [3], que resolvemos utilizando as duas técnicas para estimar $\frac{dq}{dx}$: diferenças finitas e a fórmula (3). Em ambos casos chegamos às mesmas soluções, porém pela fórmula (3) com um custo computacional menor.

Produção \ Líder	Sem líder	1	2	3	4	5
q_1	36,9325	**42,5382**	36,0000	36,1176	36,3125	36,5175
q_2	41,8181	41,0772	**47,6967**	41,1599	41,3173	41,4830
q_3	43,7066	43,1159	43,1060	**48,9772**	43,3071	43,4392
q_4	42,6592	42,1951	42,1873	42,2467	**46,7551**	42,4489
q_5	39,1790	38,8239	38,8180	38,8633	38,9386	**41,9697**
Q	204,30	207,75	207,81	207,36	206,63	205,86

Tabela 1: Quantidades ótimas de produção (q) para o Problema de Equilíbrio de Nash-Cournot sem líder, como em [2], e para adaptações de mesma estrutura à Problemas do Líder, como em [3].

Está registrado na tabela acima que, invariavelmente, quando uma firma atua como líder em um sistema de mercado, ela produz uma quantidade maior que produziria em um sistema onde não é líder; e quando **não** é líder, invariavelmente produz uma quantidade menor do que produziria num sistema onde não há líder. Consideramos isto uma validação da teoria que uma firma, quando em posição privilegiada, deve aumentar sua quota de mercado.

A partir desses resultados, somos encorajados a continuar o estudo destas implementações na abordagem de outras extensões deste gênero de problema, incluindo elementos de probabilidade, desde a consideração de diversos cenários, até processos estocásticos.

Agradecimentos

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pós-graduação e Pesquisa da Universidade Federal de Juiz de Fora, por apoiar nossa pesquisa através de uma bolsa PIBIC.

Referências

[1] Mazorche, S.R., and Ferreira, F.T. Análise do Algoritmo de Ponto Interior e Direções Viáveis FDIPA. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 7, 2020.

[2] Murphy, F.H., Sherali, H.D. and Soyster, A.L. A mathematical programming approach for determining oligopolistic market equilibrium. *Mathematical Programming 24*, 1982. DOI: 10.1007/BF01585096.

[3] Murphy, F.H., Sherali, H.D. and Soyster, A.L. Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations, *Operations Research*, volume 31, 1983.

[4] Herskovits, J., Mazorche, S.: A feasible directions algorithm for nonlinear complementarity problems and applications in mechanics,*Struct. Multidiscip. Optim.* 37(5), 435–446, 2009.