

Análise da estabilidade do escoamento de jato viscoelástico bidimensional

Rafael L. Sterza¹

Analice C. Brandi²

DMC/FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

Márcio T. Mendonça³

CTA/IAE/APA, São José dos Campos, SP

Leandro F. de Souza⁴

ICMC/USP, São Carlos, SP

Resumo. Há um grande interesse no estudo do escoamento de jato pela considerável importância tecnológica, por exemplo, processos de mistura de componentes, transferência de calor e sistemas de propulsão são algumas das aplicações industriais que envolvem esse tipo de escoamento. A otimização destes processos pode ser realizada através do controle de determinados tipos de instabilidades e vórtices, que são responsáveis por influenciar fortemente a dinâmica do jato. Ao estudar a instabilidade hidrodinâmica, através da Teoria de Estabilidade Linear, é necessário conhecer os componentes do escoamento base. Diante disso, este trabalho considera algumas hipóteses impostas sobre o escoamento base de jato laminar e, para verificá-las, utilizou-se o *software* OpenFOAM. Além disso, investiga-se as instabilidades de Kelvin-Helmholtz através de curvas neutras de estabilidade.

Palavras-chave. Escoamento de Jato, Software OpenFOAM, Teoria de Estabilidade Linear, Instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

1 Introdução

A instabilidade viscoelástica em vários regimes de escoamento, como escoamento de cisalhamento paralelo, escoamento entre placas e escoamento de Taylor-Couette, é bem explorada [10]. Para o escoamento plano de Poiseuille, a instabilidade viscoelástica foi estudada recentemente, por Brandi, Mendonça e Souza [1]. Neste trabalho, os autores afirmam que, à medida que a quantidade da concentração de polímero no fluido diminui, o escoamento se torna mais estável, uma vez que o número crítico de Reynolds aumenta e a faixa de frequências instáveis diminui.

Quanto ao escoamento de jato viscoelástico e camada de mistura, Rallison e Hinch [5] consideraram o jato elástico submerso caracterizado pelo perfil parabólico para altos números de Reynolds e mostraram que o modo sinuoso está totalmente estabilizado por grande elasticidade, enquanto que o modo varicoso está parcialmente estabilizado. Mais recentemente, Zhang [10] investigou o escoamento do jato viscoelástico, empregando o modelo Oldroyd-B na equação constitutiva. Neste estudo, o resultado da análise de estabilidade modal em jatos poliméricos indicou que o efeito elástico não só afetou a instabilidade hidrodinâmica, aumentando o seu número de Reynolds crítico, mas também levou ao surgimento de um novo mecanismo de instabilidade, chamada de instabilidade elástica, para pequenos números de Reynolds.

¹rlsterza@gmail.com.

²analice.brandi@unesp.br.

³marciomtm@fab.mil.br.

⁴lefraso@icmc.usp.br.

No entanto, considerando a Teoria de Estabilidade Linear para analisar as instabilidades do escoamento, é necessário conhecer o escoamento base do problema em questão. O escoamento base do jato laminar é dado por um perfil de velocidade canônico e os componentes do tensor extra-tensão são calculados considerando uma aproximação de escoamento paralelo, que foi validada comparando com os perfis do tensor extra-tensão obtidos por simulações computacionais de dinâmica dos fluidos. Diante disso, este trabalho objetiva verificar a hipótese de paralelismo pressuposta no escoamento base e, além disso, verificar as condições de estabilidade através de curvas neutras para diferentes parâmetros adimensionais.

2 Formulação Matemática

Esta seção apresenta as equações que modelam escoamentos isotérmicos e incompressíveis para fluidos não-Newtonianos. E, ainda, o modelo Oldroyd-B foi considerado para o tensor extra-tensão.

2.1 Equações Governantes e Escoamento Base

Considerando um escoamento incompressível e isotérmico de um fluido não-Newtoniano, as equações governantes adimensionais são dadas pelas equações de conservação de massa e do momento, isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (2)$$

onde \mathbf{u} denota o campo de velocidade, t o tempo, p a pressão, β o coeficiente adimensional da viscosidade do solvente, Re é o número de Reynolds e \mathbf{T} é o tensor extra-tensão. Utiliza-se, neste trabalho, o modelo Oldroyd-B na equação constitutiva, dada na forma adimensional por

$$\mathbf{T} + Wi \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T}(\nabla \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{u})\mathbf{T} \right] = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \mathbf{D}, \quad (3)$$

onde Wi é o número de Weissenberg e $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ é o tensor taxa de deformação.

Neste trabalho, os escoamentos de jatos viscoelásticos são estudados e as direções do fluxo do escoamento e a normal são dadas por x e y , respectivamente. Considera-se, por hipótese, que o escoamento base é laminar e paralelo. A componente de velocidade do escoamento base é a mesma utilizada por Michalke (1971) [4] e os componentes do tensor extra-tensão não-Newtoniano do escoamento base são dados por

$$U(y) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \frac{R}{4\theta} \left(\frac{R}{y} - \frac{y}{R} \right) \right], \quad T_b^{yy} = 0, \quad T_b^{xy} = \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{dU}{dy} \quad \text{e} \quad T_b^{xx} = 2Wi T_b^{xy} \frac{dU}{dy}, \quad (4)$$

onde R denota a meia largura do jato e θ a espessura da camada limite. A fim de testar a aproximação do escoamento paralelo para os tensores extra-tensão, foram realizadas simulações numéricas de dinâmica de fluidos computacional através do *software* OpenFOAM. Os componentes do tensor extra-tensão resultantes da simulação utilizando o pacote CFD foram comparados aos perfis descritos na equação (4).

2.2 Teoria de Estabilidade Linear

A equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B foi apresentada por Souza *et al* (2016) [7]. O escoamento instantâneo é decomposto em duas partes, um escoamento

base e um escoamento de perturbação. O escoamento base é considerado paralelo e invariante na direção x . As perturbações são escritas como modos normais

$$\phi(x, y, t) = \bar{\phi}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad (5)$$

onde $\bar{\phi}$ representa a magnitude e a fase das perturbações, $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ é o número de onda na direção x e a taxa de crescimento espacial e ω é a frequência angular. Substituindo a solução do modo normal (5) nas equações de Navier-Stokes de perturbação e reescrevendo de forma simplificada, obtém-se a equação de Orr-Sommerfeld modificada para o fluido Oldroyd-B

$$\begin{aligned} \frac{d^4 v}{dy^4} - \left[i(\alpha U - \omega) \frac{Re}{\beta} + 2\alpha^2 \right] \frac{d^2 v}{dy^2} + \left[i \frac{Re\alpha}{\beta} \frac{d^2 U}{dy^2} + i \frac{Re\alpha^2}{\beta} (\alpha U - \omega) + \alpha^4 \right] v + \\ + \frac{Re}{\beta} \left[\alpha^2 \frac{dT^{xx}}{dy} - i\alpha \frac{d^2 T^{xy}}{dy^2} - i\alpha^3 T^{xy} - \alpha^2 \frac{dT^{yy}}{dy} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Esta equação é conhecida como equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B [7]. A solução da equação (6) corresponde a um problema de autovalor, sendo que a solução está diretamente ligada aos valores de α , ω , Re , β e Wi , e depende do perfil de velocidade do escoamento base em questão [1]. Os componentes do tensor extra-tensão não-Newtoniano, apresentados na equação (6), são dadas por

$$T^{yy} (1 - i(\omega - \alpha U)Wi) = -Wi \left(\frac{dT_b^{yy}}{dy} v - 2i\alpha v T_b^{xy} - 2 \frac{dv}{dy} T_b^{yy} \right) + \frac{2(1 - \beta)}{Re} \frac{dv}{dy}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T^{xy} (1 - i(\omega - \alpha U)Wi) = -Wi \left(v \frac{dT_b^{xy}}{dy} - i\alpha v T_b^{xx} - \frac{dU}{dy} T^{yy} - \frac{i}{\alpha} \frac{d^2 v}{dy^2} T_b^{yy} \right) + \\ + \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(i\alpha v + \frac{i}{\alpha} \frac{d^2 v}{dy^2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$T^{xx} (1 - i(\omega - \alpha U)Wi) = -Wi \left(v \frac{dT_b^{xx}}{dy} + 2T_b^{xx} \frac{dv}{dy} - 2T_b^{xy} \frac{i}{\alpha} \frac{d^2 v}{dy^2} - 2T^{xy} \frac{dU}{dy} \right) - \frac{2(1 - \beta)}{Re} \frac{dv}{dy}. \quad (9)$$

Considerando as equações (7) – (9) juntamente com as condições de contorno apropriadas, obtém-se os resultados da análise de estabilidade linear. A equação (6) também precisa ser avaliada nos limites para escoamentos de jato plano [2], as condições auxiliares são especificadas como segue

$$U_\infty = U_{\text{coflow}}, \quad \text{para } y \rightarrow \pm\infty, \quad \text{e} \quad T_b^{xx} = T_b^{xy} = T_b^{yy} = 0.$$

Além disso, todas as derivadas de U e T_b em relação a y devem ser zero, pois $y \rightarrow \pm\infty$ e as perturbações decaem exponencialmente para longe da camada de cisalhamento do jato.

3 Formulação Numérica

Nessa seção são apresentadas as ferramentas utilizadas para verificar as hipóteses impostas no escoamento base, isto é, a utilização do *software* OpenFOAM e, além disso, a análise da solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld.

3.1 Software OpenFOAM

O pacote CFD, do inglês *Computational Fluid Dynamics*, do OpenFOAM é ofertado gratuitamente e possui características particulares para solucionar numericamente as equações que modelam fenômenos da mecânica dos fluidos, em particular, as equações diferenciais parciais. O

funcionamento do *software* é básico e pode ser visto no Guia do Usuário [9]. Neste problema, utilizou-se o solver `viscoelasticFluidFoam` sem alterações em seu código fonte.

Ressalta-se que, neste trabalho, utilizou-se o *software* OpenFOAM versão 7 e as principais alterações foram realizadas nos arquivos dos diretórios que descrevem o domínio (foi necessário fazer um adensamento de malha na região y) e os componentes das condições de entrada e contorno (utiliza-se a velocidade descrita na equação (4) e condições para a pressão e para os tensores).

3.2 Solução Numérica da Equação de Orr-Sommerfeld

A equação de Orr-Sommerfeld, obtida através da Teoria de Estabilidade Linear, representa um problema de autovalor e, neste trabalho, foi resolvida através do método *Shooting*. O código implementado, resumidamente, utiliza Runge-Kutta de quarta ordem para integrar a equação de Orr-Sommerfeld, onde a frequência ω , os parâmetros adimensionais Re , Wi e β e uma estimativa inicial para α são dadas. A integração ocorre nos limites $y = \pm\infty$ para o centro $y = 0$. As autofunções resultantes são comparadas e utiliza-se o método da Secante para corrigir a estimativa para α até que a comparação entre as duas autofunções atinja um valor de tolerância pequeno. Durante a integração, um procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt é usado para garantir que os autovetores viscosos e invíscidos permaneçam ortogonais [3].

Na região onde o escoamento laminar se torna instável, dois tipos de flutuação da velocidade sinusoidal foram encontrados: um é simétrico e o outro é anti-simétrico em relação à linha central do jato [6]. Em outras palavras, o escoamento de jato está sujeito as instabilidades de Kelvin-Helmholtz, a partir de dois modos instáveis independentes, conhecidos como varicoso (simétrico) e sinuoso (anti-simétrico).

4 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos do estudo do comportamento do escoamento de jato laminar em termos de como evolui a jusante, utilizando o *software* OpenFOAM para simulá-lo numericamente.

4.1 Estudo do Escoamento Laminar

Nesta seção apresenta-se uma investigação do comportamento do escoamento de jato laminar através da comparação dos tensores não-Newtonianos, que foram considerados para a análise de estabilidade, e os obtidos pelo OpenFOAM com o objetivo de verificar, por exemplo, a hipótese de escoamento paralelo. No trabalho de Sterza (2020) [8] há uma verificação da metodologia utilizando o escoamento de Poiseuille, onde a solução analítica é conhecida. A Figura 1 ilustra o domínio do escoamento do jato, sendo L o comprimento do escoamento e H a altura.

O objetivo dessa seção é realizar a comparação dos tensores T_{foam} e $T(U_{foam})$, tais que T_{foam} representam os tensores simulados do OpenFOAM enquanto $T(U_{foam})$ são os tensores calculados através da equação (4), onde a velocidade utilizada foi obtida da simulação realizada no *software* OpenFOAM. Vale destacar que, as derivadas da velocidade foram calculadas por aproximações de quarta ordem e, além disso, os resultados do OpenFOAM foram obtidos na posição $x = \frac{2}{3}L$.

Por consequência, alguns parâmetros fixos são considerados: $L = 90$ e $H = 30$, além disso, a velocidade de entrada (*inlet*) é a apresentada na equação (4) para $R = 1$, $\theta = 0.1$ e $U_{coflow} = 0.1$, permitindo que o *software* realize a simulação até atingir o estado estacionário. Os resultados foram simulados para diferentes parâmetros adimensionais, mostrando boa concordância entre os resultados obtidos utilizando o pacote CFD e os valores de aproximação de escoamento paralelo.

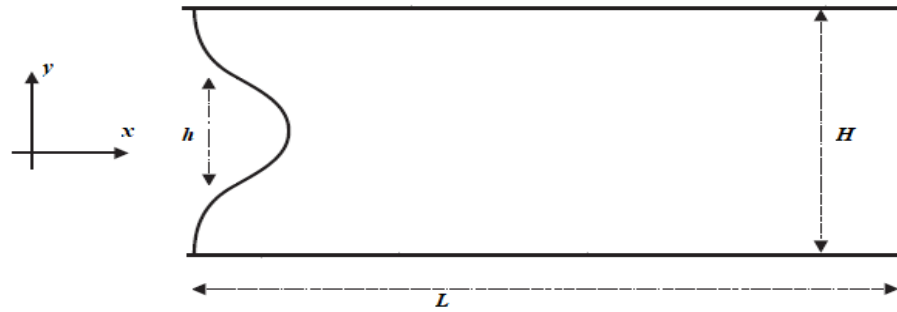


Figura 1: Domínio computacional para o escoamento do jato.

Os resultados da Figura 2 são para $Re = 250$, $\beta = 0,5$ e $Wi = 6$ e $Wi = 10$, sendo que a Figura 2(a) e a Figura 2(b) referem-se aos tensores não-Newtoniano T^{xx} e T^{xy} , respectivamente.

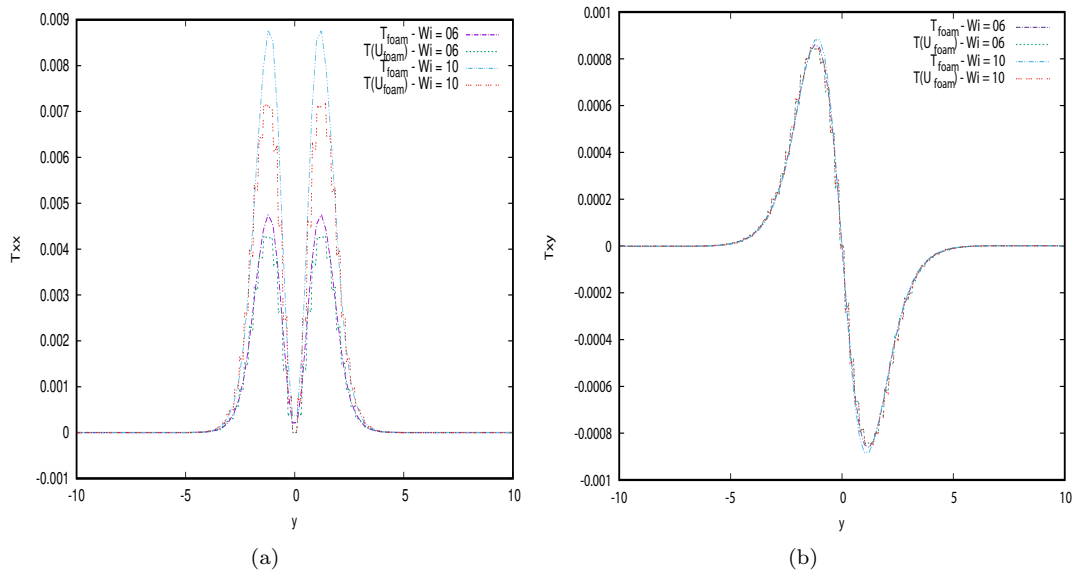


Figura 2: Tensores não-Newtonianos para $Re = 250$, $\beta = 0.5$, $Wi = 6$ e $Wi = 10$: (a) T^{xx} e (b) T^{xy} .

Os resultados mostram uma boa concordância entre os tensores calculados, T^{xx} e T^{xy} , e os tensores correspondentes calculados com a suposição de escoamento paralelo. O tensor T^{xy} não varia com o aumento do número de Weissenberg, conforme esperado pela equação (4). As pequenas diferenças na amplitude podem ser atribuídas à resolução do domínio computacional dos resultados obtidos utilizando o pacote CFD. Além disso, os resultados de T^{yy} ficaram próximos de zero, por isso, foram omitidos.

4.2 Análise de Estabilidade: Curvas Neutras

Os resultados da análise espacial utilizando o código de Teoria de Estabilidade Linear são apresentados nesta subseção através das curvas neutras de estabilidade. Em Sterza (2020) [8]

realizou-se uma verificação do código numérico através de comparações de curvas neutras encontradas na literatura. Nesta análise considera-se ω real e α complexo, isto é, uma análise espacial. Com o objetivo de avaliar as curvas neutras de estabilidade, diferentes simulações numéricas foram realizadas variando-se os parâmetros adimensionais para o escoamento do fluido Oldroyd-B e comparando com o escoamento de fluido Newtoniano. Neste trabalho, os parâmetros estudados são o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi) e a constante β .

As curvas neutras separam as regiões estáveis de taxa de amplificação negativa $-\alpha_i < 0$ (acima da linha neutra), das regiões instáveis de taxa de crescimento positiva $-\alpha_i > 0$ (abaixo da linha neutra). Os componentes do escoamento base para velocidade e os tensores não-Newtonianos utilizados são dados pela equação (4) para $R = 1$ e $\theta = 0.1$ e, ainda, $y \in (-4, 4)$. A Figura 3 apresenta as curvas neutras de estabilidade para o modo sinuoso e varicoso utilizando $\beta = 0.5$ e $\beta = 0.7$, variando o número de Weissenberg e, também, apresenta a curva neutra para o fluido Newtoniano.

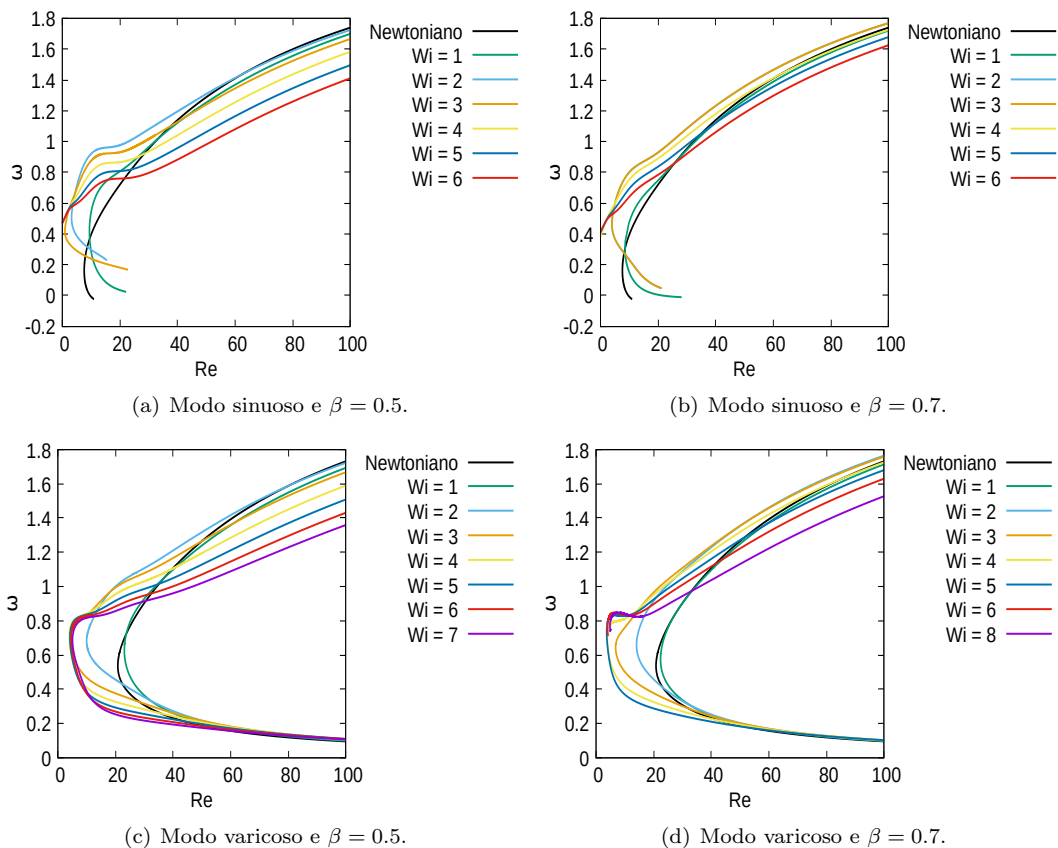


Figura 3: Curvas neutras de estabilidade para os modos instáveis de Kelvin-Helmholtz.

Observa-se um comportamento semelhante entre os dois modos de instabilidade, sendo que os efeitos elásticos (aumento de Wi) e a diminuição da contribuição do solvente Newtoniano no fluido (diminuição de β) contribuíram para o aumento das regiões instáveis. Pode-se questionar o motivo do ramo inferior da curva neutra, no caso sinuoso, não ser completa. Verificou-se a aproximação do modo sinuoso com o espectro contínuo e, com isso, o código implementado não consegue distinguir qual é o modo sinuoso e qual é o espectro contínuo, impedindo a completa construção da curva neutra. Além disso, Zhang (2012) [10] descreve o surgimento de instabilidades elásticas nesses

problemas.

5 Conclusões

Neste trabalho, apresenta-se as equações adimensionais que modelam escoamentos de jatos incompressíveis, isotérmicos e bidimensional para fluidos não-Newtonianos, em particular, viscoelástico, empregando o modelo Oldroyd-B como equação constitutiva. Primeiramente, utiliza-se o *software* OpenFOAM para simular numericamente o escoamento de jato laminar, com o objetivo de confirmar a hipótese de escoamento paralelo imposta para a escolha do escoamento base e na utilização da aproximação canônica para o componente de velocidade. De certo modo, observou-se que as pressuposições foram adequadas ao problema proposto. Em seguida, investiga-se os dois modos de instabilidade de Kelvin-Helmholtz, sinuoso e varicoso, sendo que esses apresentam alguns problemas de convergência, uma vez que o espectro contínuo está muito próximo do modo instável e, também, pode estar surgindo instabilidades elásticas, que não foram analisadas, conforme proposto na literatura.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES pelo auxílio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- [1] Brandi, A. C., Mendonça, M. T. and Souza, L. F. DNS and LST stability analysis of Oldroyd-B fluid in a flow between two parallel plates. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 267:14-27, 2019. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2019.03.003.
- [2] Kundu, P. and Cohen, I. *Fluid mechanics, 4th. edition*. Academic Press, Kidlington, 2010.
- [3] Mendonça, M. T. e Medeiros, M. A. F. *Estabilidade de Escoamentos Laminares: Teoria Linear*, volume 2, ABCM, Uberlândia, 2000.
- [4] Michalke, A. Instabilität eines kompressiblen runden Freistrahls unter Berücksichtigung des Einflusses der Strahlgrenzschichtdicke. *Progress in Aerospace Sciences*, 19:319–328, 1971. English Translation: 1977, NASA Technical Memorandum 75190.
- [5] Rallison, J. M. and Hinch, E. J. Instability of a high-speed submerged elastic jet. *Journal Fluid Mech*, 288:311–324, 1995. DOI: 10.1017/S0022112095001157.
- [6] Sato, H. The stability and transition of a two-dimensional jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 7:53-80, 1960. DOI: 10.1017/S0022112060000049.
- [7] Souza, L. F., Brandi, A. C. e Mendonça, M. T. Estabilidade de Escoamentos de Fluidos não-Newtonianos, *Turbulência*, ABCM, volume 10, capítulo 2, p. 101-160, 2016.
- [8] Sterza, R. L. Investigação da estabilidade de escoamentos de jatos viscoelásticos, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, 2020.
- [9] The OpenFOAM Foundation. *OpenFOAM v7 User Guide*, OpenCFD Ltd, 2019.
- [10] Zhang, M. Linear stability analysis of viscoelastic flows, Master's Dissertation, Royal Institute of Technology, 2012.