

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Método Assintótico para o Escoamento Bifásico de Fluidos

Fernanda Valentim de Sousa¹

PPG em Modelagem Computacional em C&T/UFF

Panters Rodríguez Bermúdez²

PPG em Modelagem Computacional em C&T/UFF

Gustavo Benitez Alvarez³

PPG em Modelagem Computacional em C&T/UFF

Diomar Cesar Lobão⁴

PPG em Modelagem Computacional em C&T/UFF

Baldomero Valiño Alonso⁵

Universidad de la Habana, Cuba

Resumo. O escoamento bifásico horizontal de fluidos em um meio poroso pode ser modelado pela equação de Buckley-Leverett, obtida quando negligenciam-se as pressões de capilaridade e a ação da gravidade. As soluções de Riemann para essa equação são constituídas em geral por seqüências de ondas de choque e de rarefação, comumente denominadas soluções fracas, que surgem na formulação integral da equação. No presente trabalho implementamos um método numérico baseado na teoria de métodos assintóticos desenvolvido por V. P. Maslov, para o caso em que a solução é de tipo choque na equação de Buckley-Leverett. Assumimos o fato da existência de tal choque, e propondo uma expansão assintótica em séries de potências desse tipo de solução, calculamos as conhecidas cadeias de Hugoniot-Maslov (sistema infinito de EDO envolvendo os coeficientes da expansão assintótica da solução) que constituem condições necessárias para a existência da mesma. Truncando-se a cadeia de Hugoniot-Maslov é possível obter um sistema fechado de equações resolvido computacionalmente via um método do tipo Runge-Kuta, juntamente com condições iniciais do tipo Riemann ou Riemann generalizado. Foram apresentados resultados numéricos que comparam as ondas de choque obtidas pelo método assintótico com as obtidas com métodos de diferenças finitas que visam demonstrar a vantagem na utilização do método assintótico na modelagem do escoamento bifásico com a equação de Buckley-Leverett.

Palavras-chave. Escoamento Bifásico, Buckley-Leverett, Ondas de Choque, Método Assintótico.

¹f.vdesousa@gmail.com

²pantersrb@id.uff.br

³benitez.gustavo@gmail.com

⁴lobaodiomarcasar@yahoo.ca

⁵bval60@gmail.com

1 Introdução

Na simulação de reservatório frequentemente se está interessado no escoamento simultâneo de dois fluidos em um meio poroso, de modo que utiliza-se um modelo simplificado para o *escoamento bifásico* assumindo que a porosidade e a permeabilidade absoluta da rocha são constantes. Também a temperatura é constante e não há troca de massa entre as fases. Negligencia-se os efeitos de compressibilidade e assume-se que não existem fontes ou sumidouros.

Considerando a equação de conservação de massa para cada fase, conjuntamente com a lei de Darcy para a velocidade do escoamento, assumindo que o meio poroso encontra-se totalmente saturado, que as viscosidades são constantes, negligenciando efeitos de capilaridade assim como de gravidade, e considerando funções quadráticas de permeabilidade relativa para cada fase, pode-se deduzir a equação de Buckley-Leverett que modela esse tipo de escoamento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{u^2 + \mu(1-u)^2} \right) = 0, \quad (1)$$

onde u é a saturação de uma das fases e μ é a razão entre as viscosidades dos fluidos. A equação (1) possui um comportamento hiperbólico e tem suas soluções conhecidas, contínuas por sequências de ondas de choque (objeto de estudo deste trabalho) e de rarefações.

1.1 Formação de Choques e Soluções Fracas

As soluções de leis de conservação podem apresentar uma ou várias descontinuidades que aparecem na forma de *ondas de choque*, e para seu estudo estende-se o conceito de solução a uma forma mais geral denominada *soluções fracas*. As soluções fracas ocorrem quando se busca a solução da EDP (Equação Diferencial Parcial) num sentido mais fraco dado pela formulação integral da lei de conservação [6]. Essas soluções podem ter uma ou várias descontinuidades (singularidades) ou podem ser contínuas e apresentar descontinuidades em suas derivadas. Soluções que apresentam essas características são denominadas *soluções singulares* ou generalizadas. A Teoria das Distribuições de Schwartz [12] se destaca dentre as várias teorias de funções generalizadas existentes, porém no tratamento de equações não lineares necessita-se utilizar uma teoria mais abrangente, como a Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau [2–4].

De acordo com Maslov [7] as soluções singulares de equações hiperbólicas podem ser descritas mediante um sistema de EDO's (Equações Diferenciais Ordinárias) conhecidos na literatura como cadeias de Hugoniot-Maslov [11], envolvendo os coeficientes de uma expansão assintótica. Na próxima seção será apresentado o método assintótico que é baseado na ideia de Maslov para encontrar soluções singulares do tipo choque dentro do contexto das funções generalizadas de Colombeau.

2 Método Assintótico

No contexto das funções generalizadas de Colombeau, reescreve-se a equação (1) como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{u^2 + \mu(1-u)^2} \right) \approx 0, \quad (2)$$

onde o operador “ \approx ” representa a “associação” entre funções generalizadas no sentido de Colombeau. Assim, a equação (2) é equivalente à formulação fraca da lei de conservação [9]. O método assintótico considera a existência de uma onda de choque como solução para (2) da forma

$$u(t, x) = A(t, x) + B(t, x)H(x - X(t)), \quad (3)$$

onde A , B e X são funções suaves, $X(0) = 0$, H é a função generalizada de Heaviside e a curva $x = X(t)$ descreve a trajetória da singularidade que se encontra inicialmente na origem.

O método consiste em desenvolver formalmente $A(t, x)$ e $B(t, x)$ em série de potências centradas em $X(t)$, obtendo

$$A(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(t)(x - X(t))^l, \quad B(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l(t)(x - X(t))^l,$$

de modo que pode-se reescrever a equação (3) como

$$u(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(t)(x - X(t))^l + \left[\sum_{l=0}^{\infty} B_l(t)(x - X(t))^l \right] H(x - X(t)). \quad (4)$$

Substituindo (4) em (2) e após realizar o algebrismo necessário chega-se à uma expressão na forma

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{A}_l \tau^l \right) \cdot 1 + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{B}_l \tau^l \right) \cdot H + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{C}_l \tau^l \right) \cdot H' \approx 0, \quad (5)$$

onde os coeficientes \mathcal{A}_l , \mathcal{B}_l e \mathcal{C}_l são expressões que contém os coeficientes A_l , B_l , C_l e X , suas derivadas em relação a t , além de combinações de produtos e divisões entre eles. Para mais detalhes, ver [13].

Utilizando o teorema de fundamentação teórica do método de Maslov dentro do contexto das funções generalizadas de Colombeau, demonstrado em [9, 11], pode-se igualar a zero todos os coeficientes \mathcal{A}_l e \mathcal{B}_l , e o coeficiente \mathcal{C}_0 em (5) para obter a cadeia de Hugoniot-Maslov, cujo truncamento e resolução numérica permitem a obtenção aproximada da onda de choque. De fato, para resolver computacionalmente o problema é necessário truncar a cadeia para um certo N e aplicar um método do tipo Runge-Kuta para se obter os coeficientes da expansão assintótica. Por exemplo, truncando para $N = 2$ (ou seja $l = 0, 1, 2$) e zerando os coeficientes de ordem mais alta A_3 e B_3 , obtemos o sistema “fechado” de EDO’s com 7 equações e 7 incógnitas

$$\begin{cases} A'_0 - A_1 X' = F_1(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2), \\ A'_1 - 2A_2 X' = F_2(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2), \\ A'_2 = F_3(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2) \\ B'_0 - B_1 X' = F_4(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2), \\ B'_1 - 2B_2 X' = F_5(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2), \\ B'_2 = F_6(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2), \\ X' = F_7(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2), \end{cases}, \quad (6)$$

onde as expressões das funções $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ e F_7 , podem ser encontradas em [13] e foram omitidas aqui por falta de espaço.

Uma vez resolvida numericamente a cadeia-truncada e obtidas as aproximações para os coeficientes $A_0(t), \dots, A_N(t), B_0(t), \dots, B_N(t)$ da expansão assintótica da solução, assim como a função $X(t)$ da trajetória da singularidade, reconstruímos a solução de tipo choque na forma

$$u(t, x) = \sum_{l=0}^N A_l(t)(x - X(t))^l + \left[\sum_{l=0}^N B_l(t)(x - X(t))^l \right] H(x - X(t)). \quad (7)$$

onde no caso, usamos $N = 2$.

3 Resultado Numérico

Busca-se verificar a eficiência do método assintótico na captação das ondas de choque. Uma vez obtida a solução numérica da equação (1), serão comparadas as ondas de choque captadas com o método assintótico e ondas captadas com métodos de diferenças finitas - Lax-Wendroff, Godunov e NT [6] - para um mesmo tempo t fixo.

- Exemplo 1

Neste primeiro exemplo a condição inicial é do tipo Riemann clássico dada por

$$u(0, x) = \begin{cases} 0.5 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}. \quad (8)$$

A Figura 1 ilustra o gráfico da condição inicial, e a Figura 2 ilustra o gráfico da trajetória da singularidade (descontinuidade) que é uma linha reta como esperado [5]. As Figuras 3 e 4 ilustram as ondas de choque captadas com os métodos assintóticos em comparação com os métodos de diferenças finitas. Para esta condição inicial a solução é entrópica (fisicamente correta) e o método que melhor capta a onda de choque durante sua propagação no tempo é o método assintótico que não produz nenhuma difusão ou dispersão numérica [8].

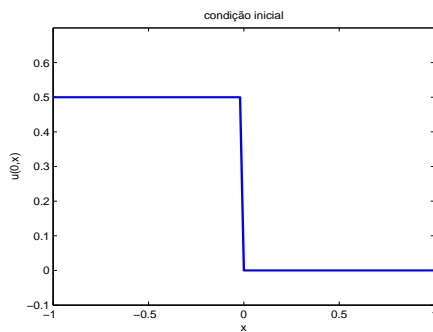


Figura 1: Gráfico da condição inicial do problema de Riemann.

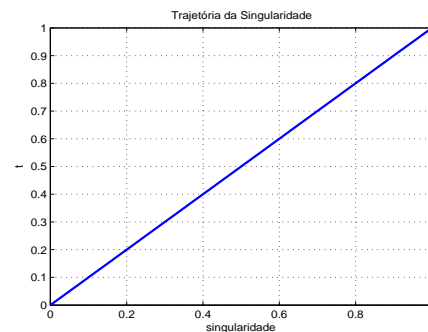


Figura 2: Trajetória da singularidade para o problema de Riemann.

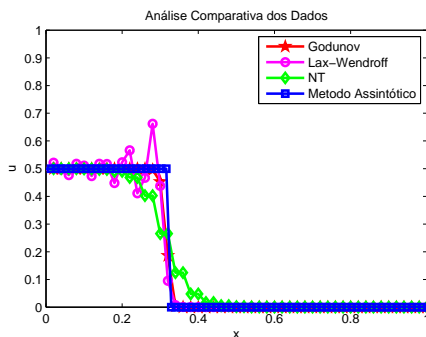


Figura 3: Perfis de onda para o problema de Riemann: iteração temporal 48.

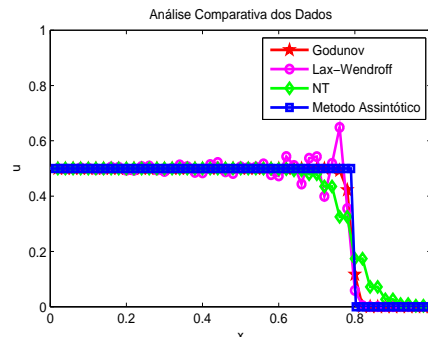


Figura 4: Perfis de onda para o problema de Riemann: iteração temporal 67.

• Exemplo 2

Neste segundo exemplo será aplicado o método assintótico desenvolvido para uma condição inicial do tipo Riemann Generalizado dada por

$$u(0, x) = \begin{cases} 0.5 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{20}x^2 & \text{se } x < 0 \\ 0 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{20}x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

As Figuras 5, 6, 7 e 8 seguem o mesmo padrão do exemplo anterior. Observa-se neste exemplo que através de uma pequena perturbação nos dados iniciais do exemplo 1, continua-se a captar uma solução aproximada do tipo onda de choque.

4 Conclusões

Observa-se que o método assintótico captou corretamente as ondas de choque que ocorrem em um problema de Riemann e Riemann Generalizado. Além disso, comparando

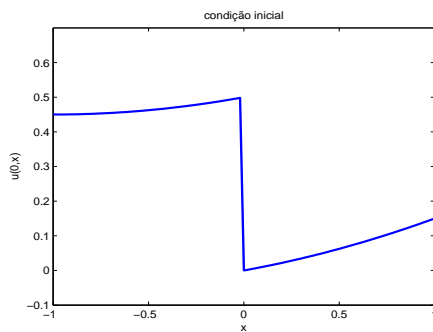


Figura 5: Gráfico da condição inicial do problema de Riemann Generalizado.

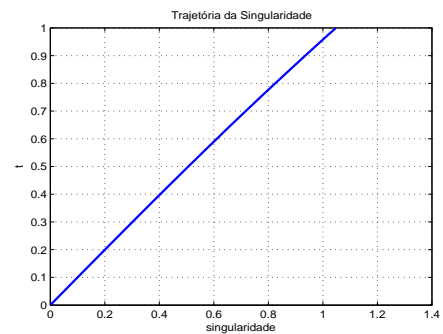


Figura 6: Trajetória da singularidade para o problema de Riemann generalizado.

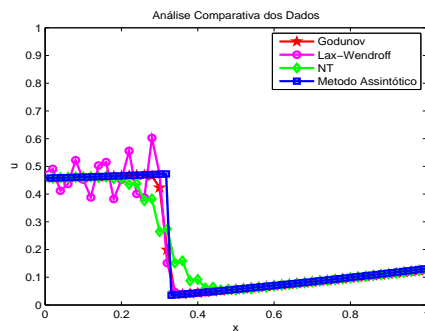


Figura 7: Perfis de onda para o problema de Riemann Generalizado: iteração temporal 48.

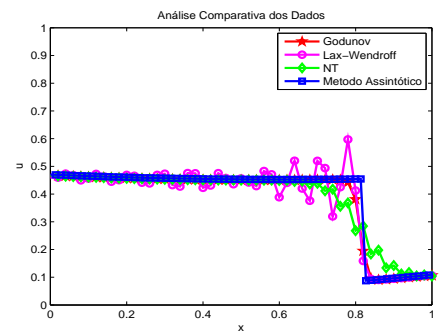


Figura 8: Perfis de onda para o problema de Riemann Generalizado: iteração temporal 67.

a solução obtida através do método com as outras soluções pode-se perceber a ausência de difusão ou dispersão nas ondas de choque captadas, demonstrando assim uma grande vantagem na sua utilização. Desse modo, o método assintótico de Maslov surge como um método alternativo aos métodos de diferenças finitas para resolver problemas que envolvam a modelagem do escoamento bifásico através da equação de Buckley-Leverett. O presente trabalho pode vir a ser utilizado como ferramenta para a análise do comportamento dos choques, permitindo verificar a sua existência (ou não) em problemas de mesma natureza.

Agradecimentos

À CAPES pela concessão de bolsa para a realização do mestrado, a todos os professores e colegas do PPG em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia MCCT/UFF, em especial ao professor Tiago Neves pelas suas grandes contribuições.

Referências

- [1] Z. Chen, G. Huan and Y. Ma. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. *Southern Methodist University*. Dallas, Texas, 2006.
- [2] J. F. Colombeau. Elementary Introduction to New Generalized Functions. *North Holland Math*. 1985.
- [3] J. F. Colombeau. Multiplications of Distributions. *Springer Verlag*, p.183. 1992.
- [4] J. F. Colombeau. New Generalized Functions and Multiplications of Distributions *North Holland Math*. 1984.
- [5] D. Kroner. Numerical Schemes for Conservation Laws. *Wiley Teubner*. 1997.
- [6] R. J. LeVeque. Numerical Methods for Conservation Laws. *Birkhauser Verlag*. 1992.
- [7] V. P. Maslov. Propagación de las ondas de choque en un gas isoentrópico no viscoso. *En Itogui Naúki i Téjnikí*, p.199. 1977.
- [8] E. C. de Oliveira and M. Tygel. Métodos Matemáticos para Engenharia. *Sociedade Brasileira de Matemática*. 2010.
- [9] P. Rodríguez-Bermúdez and B. Valiño-Alonso. Hugoniot-Maslov Chains of Shock Wave in Conservation Law With Polynomial Flow. *Mathematische Nachrichten*, 907 – 915. 2007.
- [10] P. Rodríguez-Bermúdez. Buoyancy Driven Three-Phase Flow in Porous Media. Tese de doutorado, IMPA, 2010.
- [11] P. Rodríguez-Bermúdez. Cadenas de Hugoniot-Maslov para una ecuación de Ley de Conservación con flujo polinomial. Dissertação de Mestrado, Universidad de La Habana, Cuba, 2005.
- [12] L. Schwartz. Théorie des distributions. *Herchmann*. 1966.
- [13] F. V. de Sousa. Estudo e Implementação Computacional do Método Assintótico Tipo Maslov Aplicado à Propagação de Choques para a Equação de Buckley-Leverett, Dissertação de Mestrado, UFF-EEIMVR, 2015.