

Modelagem Fracionária para Dinâmica Neural

Jackson Ricardo Pereira de Lucena Silva¹
 PPGMC FURG, Rio Grande, RS e IFC, Concórdia, SC
 Adriano De Cezaro²
 IMEF/FURG, Rio Grande, RS

1 Resumo

Podemos dizer que o processamento de informações é um fenômeno biológico do cérebro, que acontece graças a química neural. O entendimento de tal fenômeno, de sua complexidade e importância levou a formulação de redes artificiais que simulam o processamento cerebral, as chamadas Redes Neurais Artificiais (RNA) [3]. Uma RNA possui um sistema que permite estabelecer uma relação entre entradas e saídas inspiradas no sistema nervoso, através de capacitores e resistores, onde as informações são processadas em paralelo, com possibilidade de aprendizado e distribuído por unidades de processamento. Essas unidades são dispostas em uma ou mais camadas e interligadas por um certo número de conexões (sinapses), normalmente unidirecionais [3]. À mesma maneira que o cérebro, as RNA são capazes de aprender por meio de exemplos, generalizando a informação armazenada e reconhecendo padrões, tornando-se uma importante ferramenta na área de aprendizado de máquina. Há muitos modelos diferentes de RNA, cada qual baseado em diferentes metodologias e aplicado para fins específicos [3].

Nesta contribuição, nos propomos a estudar uma generalização do modelo proposto por Hopfield [4], em que os capacitores e resistores correspondem a materiais que conservam memória ou propriedades hereditárias, e.g [1, 2, 7] e referências, composta por uma rede neural auto-associativa determinada pela dinâmica de ordem multi-fracionária,

$${}^C D_t^\alpha \vec{u}(t) = -A\vec{u}(t) + W\vec{F}(\vec{u}(t)) + \vec{I}(t) \quad (1)$$

onde ${}^C D^\alpha$ e A são matrizes diagonais, cujos coeficientes não nulos representam, respectivamente, as entradas derivadas de Caputo [8] de ordem $\alpha_j \in]0, 1]$, denotadas por ${}^C D^{\alpha_j}$ para $j = 1, \dots, n$ e elementos positivos $a_i > 0$ que correspondem a taxa de carregamento do neurônio. O vetor $\vec{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado da i -ésima unidade no tempo t da rede neural, $W_{n \times n}$ é a matriz que contém como entradas (w_{ij}) os pesos e conexão do j -ésimo neurônio no i -ésimo neurônio, $\vec{F}(\vec{u}(t)) = [f_1(u_1(t)), f_2(u_2(t)), \dots, f_n(u_n(t))]^T$ é a função de ativação dos neurônios e $\vec{I}(t) = [I_1(t), I_2(t), \dots, I_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de entrada externa.

Para o caso em que $\alpha_j = \alpha \in]0, 1]$ para todo $j = 1, \dots, n$, resultados de estabilidade e controlabilidade forma provados em [6] quando para \vec{F} linear, em [7] os autores exploram as consequências da dinâmica com oscilações não amortecidas e em [5] foi proposto o estudo de bifurcações e caos. Tais resultados para o modelo (1) é fruto de trabalhos futuros.

Nesta contribuição analisaremos as consequências das diferentes escolhas de $\alpha_j \in]0, 1]$ na dinâmica do modelo (1). A Figura 1 apresenta a solução do sistema (1) para diferentes escolhas

¹jackson.silva@ifc.edu.br

²decezaromtm@gmail.com

de $\alpha_j \in]0, 1]$ (a saber, $\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 0.8, \alpha_3 = 0.7$; ou $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.9$ ou $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$), para $n = 3$ neurônios, $A = \text{diag}(-5, -7, -5)$, $W = [2, 1, -1.5; -1, -2.5, 3; 2, 1, -1.5]_{3 \times 3}$, $\vec{F}(\vec{u}(t)) = (\text{sen}(u_1), \text{sen}(u_2), \text{sen}(u_3))^T$ e $\vec{I}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \exp(-t), \text{sgn}(t-5)\right)^T$.

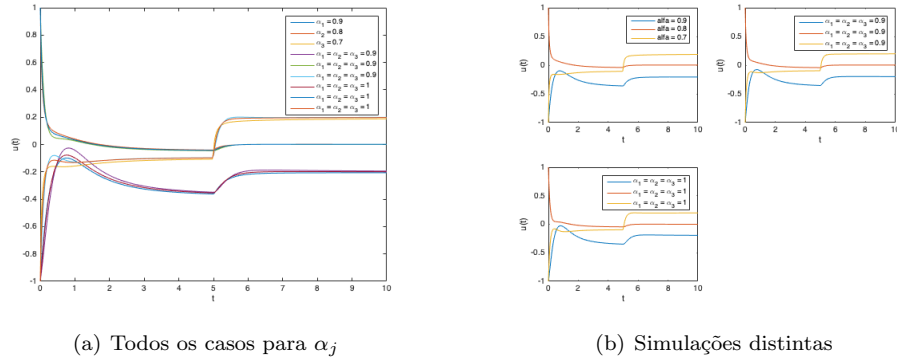


Figura 1: Solução para diferentes valores de $\alpha_j \in]0, 1]$ com condição inicial $\vec{u}(0) = (-1, 1, -1)^T$.

Percebe-se que, independentemente das escolhas de $\alpha_j \in]0, 1]$, o sistema (1) é assintoticamente globalmente estável. Por outro lado, em alguns casos que a estabilidade é atingida mais rápido (caso $\alpha_j = 0.9$).

Referências

- [1] Boroomand, A.; Menhaj, M. B. Fractional-Order Hopfield Neural Networks, *Advances in Neuro-Information Processing*, p. 883-890, 2008. DOI: 10.1007/9783642024900108.
- [2] Chen, L. P.; Chai, Y. R. C.; WU, T.D; Ma, H. Z. Dynamic analysis of a class of fractional-order neural networks with delay. *Neurocomputing* V. 111, 190-194, 2013. DOI: 10.1016/j.neucom.2012.11.034
- [3] Haykin, S. *Neural Networks and Learning Machines. 3. ed.* New York: Pearson, 2009.
- [4] Hopfield, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the national academy of sciences*, V. 79, n. 8, p. 2554-2558, 1982. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554.
- [5] Leung, A. Y. T.; Yang, H. X.; Zhu, P. Bifurcation of a Duffing oscillator having nonlinear fractional derivative feedback. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 24, n. 03, p. 1450028, 2014. DOI: 10.1142/S021812741450028X.
- [6] Lim, Y. H.; Oh, K. K.; Ahn, H.S. Stability and stabilization of fractional-order linear systems subject to input saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 58, n. 4, p. 1062-1067, 2012. DOI: 10.1016/j.ifacol.2017.08.2055.
- [7] Tavazoei, M. S.; Haeri, M.; Siami, M.; Bolouki, S. Maximum number of frequencies in oscillations generated by fractional order LTI systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 58, n. 8, p. 4003-4012, 2010. DOI: 10.1109/TSP.2010.2049568.
- [8] Teodoro, G. S.; Oliveira, D. S.; Oliveira, E. C. Sobre derivadas fracionárias. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, n. 2, 2018. DOI: 10.1590/1806-9126-rbef-2017-0213.