Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Operadores simétricos

Laura Barbosa Goulart[1]
UFU, Uberlândia, MG
Adriana Rodrigues da Silva[2]
UFU, Uberlândia, MG

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, munido com produto interno.

Definição 0.1. *$T : V \longrightarrow V$ será um operador simétrico (auto-adjunto) se $\forall u, v \in V$:*

$$T(u).v = u.T(v)$$

1 Propriedades de operadores simétricos

1. A matriz do operador simétrico sempre é simétrica, isto é, $A^t = A$ independente da base ortonormal do espaço.
2. Os autovalores de uma matriz simétrica A, de entradas reais, são números reais.
3. Seja A uma matriz simétrica. Então, a dimensão do autoespaço associado a um autovalor é igual à multiplicidade deste valor.
4. Se A é uma matriz simétrica, então seus autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

2 Teorema Espectral

Teorema 2.1. *Se $T : V \longrightarrow V$ é um operador simétrico, então existe base ortonormal β de autovetores de T.*

Demonstração 2.1. *Todo polinômio não constante de grau n possui exatamente n raízes complexas, contadas com multiplicidades. Assim, qualquer matriz A de ordem $n \times n$ possui n autovalores complexos. Entretanto, sendo $A = [T]_\alpha$, onde α é uma base ortonormal qualquer de V (pela propriedade 1), tem-se que todos os autovalores são reais(pela propriedade 2). Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ os autovalores distintos de A e $m_1, m_2, \ldots, m_k$ suas multiplicidades respectivas, com $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.*

Seja $V_{\lambda_j} = \{X \in V, (A - \lambda_j I)X = 0\}$. Pela propriedade 3, $dimV_{\lambda_j} = m_i$. Digamos que $V_{\lambda_j} = [v_{1j}, v_{2j}, \ldots, v_{m_j j}]$, $\forall j = 1, 2, \ldots, k$

Aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, podemos trocar por bases ortonormais: $V_{\lambda_j} = [u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{m_j j}]$. Pela propriedade 4: $\beta = \{u_{ij}\}_{ij}$ base ortonormal de autovetores de T.

. ■

[1]laurag.net1@gmail.com
[2]adrianafamat@ufu.br

Corolário 2.1. *Todo operador simétrico é diagonalizável.*

De fato, $[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix}$*, onde* β *é como no Teorema 2.1*

Obs: *Sejam* α *e* β *bases ortonormais, a matriz mudança de base de* β *para* α*:* $P = [I]^\beta_\alpha$ *é ortogonal, ou seja,* $P^{-1} = P^t$*. Assim, sendo* $T : V \longrightarrow V$ *um operador simétrico tal que* α, β *são como no Teorema Espectral, então:*

$$[T]_\beta = P^t [T]_\alpha P, \text{ com } P = [I]^\beta_\alpha$$

Exemplo 2.2. *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *um operador linear, com* $T(x, y) = (y, x)$*.*

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a matriz da transformação T com relação à base canônica α de $\mathbb{R}$, isto é, $A = [T]_\alpha$ temos que:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Substituindo λ por 1, teremos que $x = y$, então um autovetor v associado a esse autovalor é $v_1 = (1, 1)$.

Normalizando v_1, obtemos $u_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Substituindo λ por -1, temos que $x = -y$ e um autovetor associado a esse autovalor é $v_2 = (-1, 1)$

Normalizando v_2, temos $u_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Achamos os vetores v_1 e v_2 que normalizados formam a base ortonormal $\beta = \{u_1, u_2\}$.

Seja $[P]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$$D = P^t A P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Agradecimentos

Agradeço imensamente à minha família e aos meus amigos por sempre me apoiarem. Agradeço a minha orientadora Adriana que sempre me deu todo o suporte para meu desenvolvimento acadêmico e ao PET e a Portaria SESu-MEC pelo auxílio financeiro que é de extrema importância para mim.

Referências

[1] STEINBRUCH, A.;WINTERLE, P. **Álgebra Linear**.São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[2] Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Ribeiro, V. R. and Wetzler, H. G. *Álgebra Linear e Aplicações, 3a. edição.* Harbra, São Paulo, 1984.

