Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Classificação dos grupos de ordem 9 a 11

Victor Rodrigues Silva[1]
FAMAT/UFU, Uberlândia, MG
Adriana Rodrigues da Silva[2]
FAMAT/UFU, Uberlândia, MG

1 Introdução

No estudo de Teoria de Grupos é importante conhecer a estrutura dos grupos e suas propriedades. Os grupos finitos gerados por um elemento são cíclicos e podem ser facilmente classificados. Porém, classificar os grupos finitos gerados por dois elementos pode ser extremamente complicado. Neste trabalho, aplicando alguns resultados preliminares, conseguiremos classificar os grupos de ordem 9 a 11, a menos de isomorfismos. A classificação dos grupos de ordem ≤ 8 pode ser encontrada em [2].

2 Resultados Gerais

Teorema 2.1. *Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G. Então $|G| = |H|(G : H)$.*

Demonstração. [1], página 149. $\square$

Teorema 2.2. *Sejam n, m, s, u inteiros ≥ 0. Se G é um grupo de ordem nm que possui elementos a, b tais que: $G = \langle a, b\rangle$, $a^n = e$, $b^m = a^u$ e $ba = a^s b$, então $s^m \equiv 1 \bmod n$ e $u(s-1) \equiv 0 \bmod n$. Além disso, quando existir tal grupo, ele é único a menos de isomorfismos.*

Demonstração. [1], página 185. $\square$

3 Classificação

3.1 Grupos de Ordem 9

Temos que $\mathbb{Z}_9$ e $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ são 2 grupos de ordem 9. Eles não são isomorfos, pois $\mathbb{Z}_9$ possui elementos de ordem 9 enquanto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ não possui. Vamos verificar que, a menos de isomorfismos, eles são os únicos grupos de ordem 9.

Seja G um grupo de ordem 9 não cíclico. Pelo Teorema 2.1, todos os seus elementos $\neq e$ tem ordem 3. Sejam $e \neq \beta \in G \setminus \langle\alpha\rangle$. Assim, temos $G = \{e, \alpha, \alpha^2, \beta, \beta^2, \alpha\beta, \alpha\beta^2, \alpha^2\beta, \alpha^2\beta^2\}$. Portanto, $|G| = 9; G = \langle\alpha, \beta\rangle; \alpha^3 = e$ e $\beta^3 = e$.

Mas quem é o produto $\beta\alpha$? Por razões elementares, temos $\beta\alpha \notin \{e, \alpha, \alpha^2, \beta, \beta^2\}$. Assim, falta analisar os casos $\beta\alpha = \alpha\beta, \beta\alpha = \alpha^2\beta, \beta\alpha = \alpha\beta^2, \beta\alpha = \alpha^2\beta^2$. Pelo Teorema 2.2, sabemos que em

[1] victor.silva1@ufu.br.
[2] adrianafamat@ufu.br.

 © 2021 SBMAC

cada um dos casos, temos no máximo um grupo.

Agora, vamos verificar se esses grupos de fato existem.

Caso $\beta\alpha = \alpha\beta$. Existe. Basta tomar $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Caso $\beta\alpha = \alpha^2\beta$. Pelo Teorema 2.2 não existe tal grupo, pois $2^3 = 8 \not\equiv 1 \bmod 3$.

Caso $\beta\alpha = \alpha\beta^2$. Não existe, pois senão, tomando $A = \beta^2$ e $B = \alpha$, teríamos $G = \langle A, B\rangle$, com $A^3 = e, B^3 = e, BA = \alpha\beta^2 = \beta\alpha = A^2B$. Como vimos no caso anterior, isso não é possível.

Caso $\beta\alpha = \alpha^2\beta^2$. Não existe, pois senão, teríamos $(\alpha\beta)^2 = \alpha\beta\alpha\beta = \alpha \cdot \alpha^2\beta^2 \cdot \beta = e$. Absurdo! Pois sabemos que $\alpha\beta$ tem ordem 3.

Portanto, $\mathbb{Z}_9$ e $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ são os únicos grupos de ordem 9, a menos de isomorfismos.

3.2 Grupos de Ordem 10

Afirmação 1: G possui um elemento α de ordem 5. De fato, se G é cíclico gerado por um elemento γ, tome $\alpha = \gamma^2$. Se G não é cíclico, pelo Teorema 2.1, a ordem de qualquer elemento de G é 2 ou 5. Vamos supor que G não tenha elementos de ordem 5. Então todo elemento de G diferente de e tem ordem 2 e portanto, como pode ser visto em [2, Proposição 2.4], G é abeliano. Sejam $\alpha, \beta \in G$, então $\alpha\beta = \beta\alpha$. Logo $H = \{e, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ é um subgrupo de G com ordem 4. Mas $4 \nmid 10$. Absurdo!

Afirmação 2: Se $\beta \in G$ tal que $\beta \in G \setminus \langle\alpha\rangle$ então $\mathcal{O}(\beta) = 2$. De fato, se $\mathcal{O}(\beta) = 5$, então $e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4$ são 9 elementos distintos de G. Mas $\alpha\beta$ e $\alpha^2\beta$ são elementos de G distintos dos listados acima, então G teria pelo menos 11 elementos. Absurdo!

Logo, $G = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta, \alpha^4\beta\}$.

O elemento $\beta\alpha \notin \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \beta\}$, pois $\beta \notin G \setminus \langle\alpha\rangle$. Pelo Teorema 2.2, temos que $\beta\alpha \neq \alpha^2\beta$ pois $2^2 = 4 \not\equiv 1 \bmod 5$ e que $\beta\alpha \neq \alpha^3\beta$ pois $3^2 = 9 \not\equiv 1 \bmod 5$. Portanto, temos duas possibilidades:

$$|G| = 10; \qquad G = \langle\alpha, \beta\rangle; \qquad \alpha^5 = e; \qquad \beta^2 = e; \qquad \beta\alpha = \alpha\beta. \tag{1}$$

$$|G| = 10; \qquad G = \langle\alpha, \beta\rangle; \qquad \alpha^5 = e; \qquad \beta^2 = e; \qquad \beta\alpha = \alpha^4\beta. \tag{2}$$

Ainda pelo Teorema 2.2, existe um único grupo para cada umas das possibilidades, a menos de isomorfismos. No caso (1) o grupo é abeliano. Logo, é isomorfo a $\mathbb{Z}_{10}$, com o isomorfismo que leva $\alpha \mapsto \overline{2}$ e $\beta \mapsto \overline{5}$. O grupo D_5 das simetrias do pentágono regular satisfaz as condiçoes de (2), logo temos $G \simeq D_5$. Portanto, os grupos de ordem 10 são iguais ou isomorfos a $\mathbb{Z}_{10}$ ou a D_5.

3.3 Grupos de Ordem 11

Seja G um grupo de ordem 11. Como 11 é primo e todo grupo de ordem prima é cíclico, temos que G é cíclico. E como todo grupo cílico finito de ordem n é isomorfo a $\mathbb{Z}_n$, temos que $G \simeq \mathbb{Z}_{11}$.

4 Conclusão

Através da aplicação de resultados advindos da Teoria de Grupos concluímos que, a menos de isomorfismos, os grupos de ordem 9 a 11 são: $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{10}, D_5$ e $\mathbb{Z}_{11}$.

Referências

[1] Garcia, A. and Lequain, I. *Elementos de Álgebra, Projeto Euclides*. IMPA - SBM, Rio de Janeiro, 2002.

[2] Silva, V. R. e Silva, A. R. Classificação dos grupos de ordem ≤ 8, *X Mostra de Iniciação Científica da FAMAT*, 2021. (a aparecer)

© 2021 SBMAC