
Análises de transmissibilidade do modelo de Zener com mola Duffing

Lucas de Haro Silva¹

Departamento de Engenharia Mecânica - Faculdade de Engenharia - UNESP Bauru

Paulo José Paupitz Gonçalves²

Departamento de Engenharia Mecânica - Faculdade de Engenharia - UNESP Bauru

Resumo. O modelo de Zener, também conhecido como o modelo padrão linear sólido (SLS), é um método simples e completo de modelar o comportamento de um material viscoelástico, utilizando uma combinação linear de molas e amortecedores para representar componentes elásticos e viscosos, respectivamente. Muitas vezes, o modelo mais semelhante Maxwell, que é uma mola em série com um amortecedor, e o modelo de Kelvin-Voigt, que é uma mola em paralelo com um amortecedor, são utilizados. No entanto, estes modelos são muitas vezes insuficiente para representar tal comportamento, o modelo de Maxwell não descreve a fluência ou recuperação, e o modelo de Kelvin-Voigt não descreve o stress e o relaxamento. O SLS é o modelo mais simples, que prevê dois fenômenos, o que faz com que seja também um modelo completo. Com isso em mente, é apresentado um prelúdio da investigação do modelo de amortecimento de Zener substituindo as molas simples por molas não lineares (mola Duffing), no que diz respeito ao comportamento de isolamento de vibração, mostrando as curvas de transmissibilidade para vários valores de parâmetros.

Palavras-chave. Mola não-linear, Modelo de Zener, Excitação harmônica

1 Introdução

O grande desafio para a indústria é a redução de custo, faz-se necessário assim, o aprimoramento de soluções de problemas físicos tais como vibrações e ruídos indesejados. Com isso, o desenvolvimento de novos materiais para atender esta demanda é vasta. Neste contexto, a aplicação do material viscoelástico pode ser encontrado nas indústrias aeronáutica, espacial, naval, civil, ferroviária, e automobilística. O material viscoelástico é de uma classe de materiais que apresentam reologia viscoelástica, ou seja, são materiais que, ao deformar-se, sofrem simultaneamente deformações elásticas e viscosas. Ao aplicar este material em estruturas de qualquer tipo, são obtidos ganhos significativos na redução de vibração ou ruído.

Diversas pesquisas foram utilizadas para fundamentar o conhecimento relativo ao comportamento de isolamento de vibração, bem como sua utilização em diversos sistemas advindos da engenharia e da matemática. Conforme [5] apresenta uma análise de vibração

¹lucasharo193@hotmail.com

²paulo.jpg@feb.unesp.br

livre e forçada de uma massa suportada por uma combinação paralela entre uma mola e um amortecedor elasticamente suportado (modelo de *Zener*). Temos também que [6] apresentou um trabalho sobre as frequências de um oscilador Duffing com amortecimento viscoso linear em sistemas com amolecimento e endurecimento, sistemas com variações de rigidez. Posteriormente [4] realizou uma abordagem de soluções de equações de movimento de vigas impactadas compostas com camada viscoelástica parcial de amortecimento. Uma abordagem semelhante foi também realizada por [1], apresentando resultados experimentais e numéricos. [2] realizou comparações entre dois modelos de absorvedores de energia para baixa frequência, através do modelo de *Zener*. Outro trabalho utilizando o modelo de *Zener* é o de [3], que realizou análise experimental de isoladores de vibração desenvolvidos para aplicação espacial em órbita capaz de isolar micro-vibrações, e também suportar ambiente de lançamento onde há vibração severa.

2 Modelos de amortecimentos viscoelásticos

A descrição do comportamento viscoelástico dos materiais é feita através de equações diferenciais que combinam três termos: a deformação elástica, a taxa de deformação viscosa, e um termo inercial de aceleração. A tensão total é a soma das tensões parciais de cada termo. O desenvolvimento teórico da viscoelasticidade é feito através da combinação em série ou em paralelo dos modelos idealizados. Vários são os modelamentos possíveis para viscoelasticidade linear dos polímeros, modelos estes apresentados na figura 1, que podem ser tratados matematicamente. Os principais modelos que permitem fazer uma previsão aproximada do comportamento físico-mecânico de um material viscoelástico são:

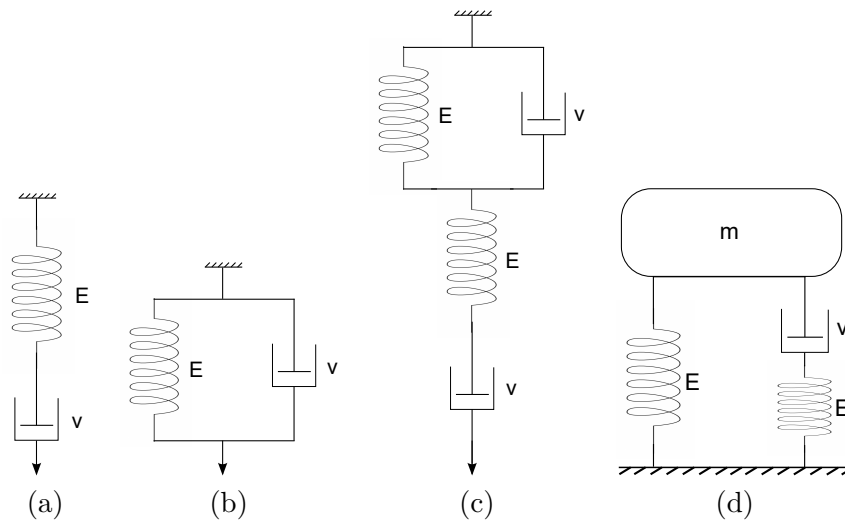


Figura 1: **(a)** - Modelo de Maxwell, **(b)** - Modelo de Kelvin, **(c)** - Modelo de Maxwell-Kelvin, **(d)** Modelo de Zener

Na figura 1, **E** representa mola, **v** representa amortecedor e **m** representa massa.

3 Modelo de Zener

O modelo de *Zener* que apresenta uma combinação linear dos modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt, fazendo assim, uma descrição mais adequada do comportamento desses materiais do que os outros modelos anteriormente citados. Na figura 2 é apresentado o modelo analisado.

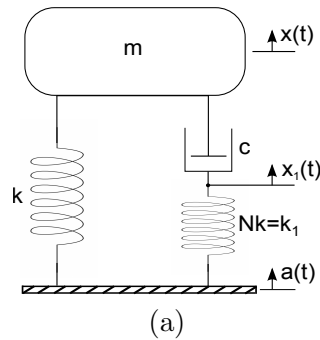


Figura 2: Modelo de Zener

Do modelo linear de *Zener* temos as equações de movimento que são obtidas pelo equilíbrio dinâmico de forças, apresentado nas equações 1 e 2.

$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad \implies \quad -k(x - a) - c(\dot{x} - \dot{x}_1) = m\ddot{x} \quad (1)$$

$$\sum F_{x_1} = 0 \quad \implies \quad -k_1(x_1 - a) + c(\dot{x} - \dot{x}_1) = 0 \quad (2)$$

A equação diferencial de terceira ordem que representa o comportamento do modelo de *Zener* linear é dada em espaço de estado pela equação 3.

$$\ddot{x} = -\frac{Nk}{c}\dot{x} = \frac{k}{m}(N + 1)\dot{x} - \frac{Nk^2}{cm}x + \frac{k}{m}(N + 1)a_0\omega \cos(\omega t) + \frac{Nk^2}{cm}a_0 \sin(\omega t) \quad (3)$$

Na figura 3 são apresentados resultados do modelo de *Zener* linear com variação do coeficiente de amortecimento (c), de 2 a 7.

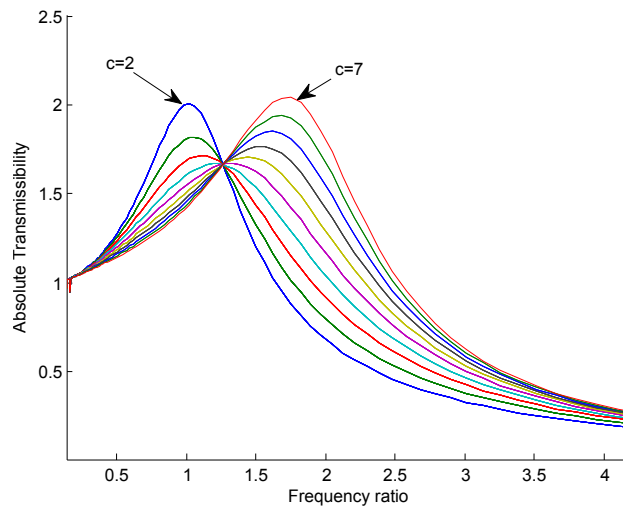


Figura 3: Resultados de transmissibilidade pela frequência do modelo de Zener

3.1 Modelo não-linear de Zener

O modelo de *Zener* não linear, apresentado através de modelos matemáticos derivados das equações de Lotka-Volterra visando investigar oportunidades de melhoria de isoladores mecânicos quando projetados para atuar em faixas dinâmicas com respostas não lineares. A não-linearidade apresentada nessa seção, trata-se de uma mola não-linear, uma mola tipo *Duffing* sendo a não-linearidade aplicada à mola (k) da figura 2. Sendo assim, o equilíbrio das forças dinâmicas é dado pelas equações 4 e 5.

$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad -N_1k(x-a) - N_2k(x-a)^3 - c(\dot{x} - \dot{x}_1) = m\ddot{x} \quad (4)$$

$$\sum F_{x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_3k(x_1-a) + c(\dot{x} - \dot{x}_1) = 0 \quad (5)$$

A equação diferencial de terceira ordem que representa o comportamento do modelo de *Zener* não-linear é dada em espaço de estado pela equação 6.

$$\ddot{x} = -\frac{N_3k}{c}\dot{x} - \frac{k}{m}(\dot{x} - \dot{a})[N_3 + N_1 + 3N_2(x-a)^2] - \frac{N_3k^2}{cm}(x-a)[N_1 + N_2(x-a)^2] \quad (6)$$

Considerando as forças de excitação harmônica dadas pelas equações 7 e 8.

$$a = a_0 \sin(\omega t) \quad (7)$$

$$\dot{a} = a_0\omega \cos(\omega t) \quad (8)$$

Os resultados da implementação da equação 6 são apresentados na figura 4.

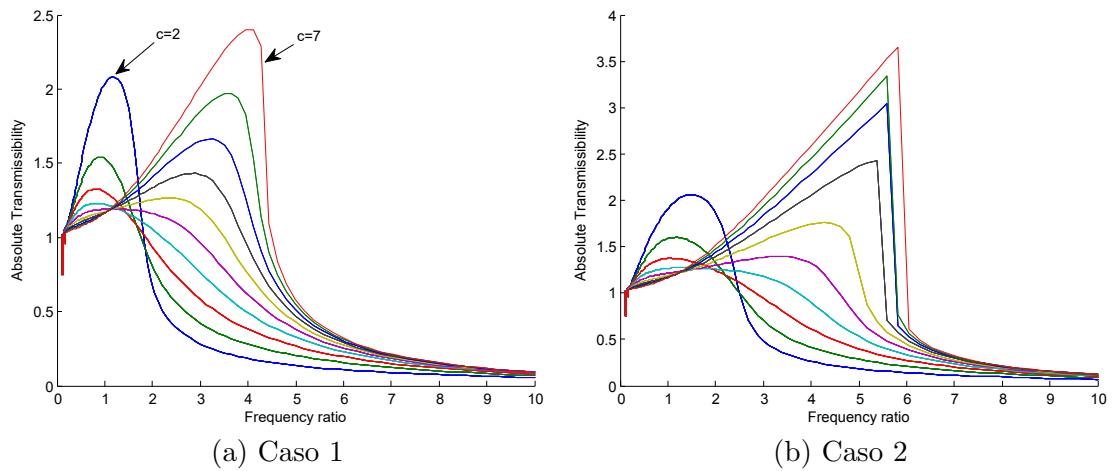


Figura 4: **Caso 1** - Modelo não linear, **Caso 2** - Modelo não linear com variação na força de excitação do sistema

4 Conclusões

O modelo de *Duffing* descreve o movimento de um oscilador amortecido com um potencial mais complicado que no movimento harmônico simples, sistemas cuja rigidez de mola não obedece exatamente lei de Hooke. É investigada a influência de diversos parâmetros possibilitando a identificação onde fenômenos indesejados possam ocorrer.

Nota-se a influência da não-linearidade no modelo de *Zener* uma vez que a análise de sensibilidade paramétrica mostra que há várias regiões onde não é possível visualizar seus resultados, e mais estudos são necessários para determinar regiões nas quais fenômenos indesejados ocorram, adotando assim, diagramas de bifurcação e mapa de *Poincaré*.

Referências

- [1] D. Granger and A. Ross. Effects of partial constrained viscoelastic layer damping parameters on the initial transient response of impacted cantilever beams: Experimental and numerical results. *Journal of Sound and Vibration*, volume 321(1), 45-64, 2009. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.09.039.
- [2] D. O. Lee, G. Park, J. H. Han, Development of vibration isolation platform for low amplitude vibration *SPIE Smart Structures and Materials + Nondestructive Evaluation and Health Monitoring*, 2014. DOI: 10.1117/12.2044984.
- [3] D. O. Lee, G. Park, J. H. Han, Experimental study on on-orbit and launch environment vibration isolation performance of a vibration isolator using bellows and viscous fluid *Aerospace Science and Technology*, volume 45, 1-9, 2015. DOI: 10.1016/j.ast.2015.04.012.

- [4] J. F. Blais, M. Cimmino, A. Ross, D. Granger. Suppression of time aliasing in the solution of the equations of motion of an impacted beam with partial constrained layer damping, *Journal of Sound and Vibration.*, 2009. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.06.001.
- [5] M. J. Brennan, A. Carrella, T. P. Waters, V. L. Junior. On the dynamic behaviour of a mass supported by a parallel combination of a spring and an elastically connected damper, *Journal of Sound and Vibration.*, 2007. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.07.074.
- [6] M. J. Brennan, I. Kovacic, A. Carrella, T. P. Waters, On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator, *Journal of Sound and Vibration.*, 2008. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.04.032.