

## Da Teoria de Medida à Análise Fractal: o Algoritmo de Feder para a Análise do Equilíbrio Humano

Denise Gomes de Castro<sup>1</sup>

UFBA, Salvador, BA

Leandro Gaspar Custódia<sup>2</sup>

UFBA, Salvador, BA

O equilíbrio humano gera estabilidade e produz condições para que outros movimentos possam ser realizados. Emergindo da interação de diversos sistemas corporais, continuamente o equilíbrio gera pequenas oscilações posturais que podem indicar condições de saúde [2, 4]. As oscilações posturais apresentam um padrão geométrico complexo e, para a sua análise, vêm sendo utilizados métodos fractais. Fractais são estruturas geométricas fraturadas compostas por padrões que se repetem em ao menos dois níveis de escala. Os métodos fractais produzem características qualitativas e quantitativas diretas do movimento e avaliam o comprometimento sensorio-motor.

Entre os métodos fractais está o *box-counting*. Esse é um dos diferentes métodos de análise que mensura a dimensão fractal de uma estrutura (por exemplo a trajetória das oscilações posturais), ou seja, um parâmetro descritivo que caracteriza o padrão de preenchimento de uma estrutura do espaço através de medidas de auto semelhança [5] resultando um índice que caracteriza o padrão de preenchimento do espaço ou padrão de irregularidade da figura [2]. Entre os algoritmos mais utilizados na análise do equilíbrio está o algoritmo de Feder.

O algoritmo de Feder foi descrito em 1988, baseando-se na Teoria da Medida, com o intuito de mensurar propriedades de conjuntos de pontos no limite de um diâmetro de desaparecimento [5]. A Teoria da Medida foi construída por matemáticos como Lebesgue e Carathéorodý [1]. Inicialmente, para realizar uma medida, é necessário definir uma unidade de medida. Sabendo que o corpo humano se move para frente, para trás e para os lados, as oscilações posturais se apresentam em duas direções,  $x$  e  $y$ , e podem ser vistas no plano. Para medir o plano, cuja dimensão é igual a 2, uma caixa, *box*, de lado  $\delta$  pode ser utilizada como unidade de medida.

Inicialmente, dada a série temporal da oscilação postural, uma malha de caixas de lado  $\delta$  recobre toda a figura. Contando o número de caixas  $N_\delta$  necessárias para cobrir a figura tem-se a medida do comprimento  $L$  da figura, tal que

$$L = N_\delta \cdot \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0 \cdot \delta^0 \quad (1)$$

assim, no limite, quando  $\delta$  tende a zero, a medida do comprimento torna-se assintoticamente igual a  $L$ , independentemente do valor do lado  $\delta$ .

Como em cada uma dessas caixas o valor do lado é  $\delta$ , sua área corresponde a  $\delta^2$  e a área associada da figura é dada por

$$A = N_\delta \cdot \delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \cdot \delta^1 \quad (2)$$

<sup>1</sup>denisegc@ufba.br

<sup>2</sup>cgaspar.leandro@gmail.com

desse modo, manipulando a equação 2 o número de quadrados necessários para cobrir uma figura é dado por

$$N_\delta = \frac{A_0}{\delta^2} \quad (3)$$

De acordo com a Teoria da Medida,  $g_\delta = y_d \cdot \delta^d$ , onde  $y_d$  é uma constante, neste caso igual a 1, e a figura é coberta para formar a medida  $M_d$ , tal que

$$M_d = \sum g_\delta \quad (4)$$

Como, em 2,  $\delta \rightarrow 0$ , a medida  $M_d$  equivale a zero ou a infinito. O valor de  $M_d$  depende da dimensão de medida, desse modo, a dimensão crítica  $D$  para a qual o valor da medida muda de zero para infinito é a dimensão de Hausdorff-Besicovich. Essa dimensão é considerada uma propriedade local, por mensurar propriedades num pequeno espaço. Assim, considerando a equação 4,  $M_d$  é a medida  $d$  das oscilações posturais, de modo que, quando  $d > D$  a medida equivale a zero e quando  $d < D$  a medida equivale a infinito, apenas quando  $d = D$  a medida apresenta, comumente, um valor finito.

De modo mais simples, contando o número de caixas necessárias para cobrir a figura,  $N_\delta$ , assintoticamente no limite, a dimensão  $D$  é dada por

$$N_\delta \sim \frac{1}{\delta^D} \quad (5)$$

Logo, a dimensão fractal, a partir do algoritmo de Feder, é o ínfimo dos valores, ou seja, aproximadamente o menor valor encontrado em todas as coberturas possíveis. Desse modo, a dimensão fractal, por esse algoritmo, é definida como uma medida de área e, assim como o algoritmo de Prieto, fornece uma única medida para a dimensão fractal referente ao somatório de todo o movimento realizado. O algoritmo de Feder foi utilizado para a análise das oscilações posturais de adultos com Síndromes de Down e Prader-Willi, adultos obesos e adultos hígidos [2, 3].

## Agradecimentos

Agradecemos ao Prof. José Garcia por todo o conhecimento e apoio.

## Referências

- [1] BERROETA, R. R. *Teoría de la medida e integración*. 1 Edición. Chile: Ediciones Universidad Católica del Chile, 2016.
- [2] CIMOLIN, V. et al. Fractal dimension approach in postural control of subjects with Prader-Willi Syndrome. *Journal of neuroengineering and rehabilitation*, volume 8, number 45, 2011. Doi: 10.1186/1743-0003-8-45.
- [3] CIMOLIN, V. et al. The fractal dimension approach in posture: a comparison between down and prader-willi syndrome patients. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, volume 17, number 4, pages 1535-1541, 2013.
- [4] DUARTE, M.; FREITAS, S. M. S. F. Revisão sobre posturografia baseada em plataforma de força para avaliação do equilíbrio. *Brazilian Journal of Physical Therapy*. volume 14, number 3, pages 183-192. Doi: 10.1590/S1413-35552010000300003.
- [5] FEDER, J. *Fractals*. 3a. edition. New York: Plenum Press, 1988.