Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Movimento Browniano e Integral de Itô

Rebeca A. D. de L. e Silva[1]
IM-UFAL, Maceió, AL

Resumo. Diversos problemas são modelados por processos estocásticos e, em tais modelos, os conhecimentos que temos de Cálculo Diferencial e Integração não são suficientes para explicar os mesmos. Deste modo, estudamos conceitos desenvolvidos para estudar estes problemas, com destaque para o Movimento Browniano e, por conseguinte, a Integral de Itô. Este trabalho é um primeiro estudo destes conceitos, que pretendemos aprofundar em trabalhos futuros.

Palavras-chave. Probabilidade, Processos Estocásticos, Movimento Browniano, Cálculo Estocástico, Equações Diferenciais Estocásticas.

1 Introdução

O estudo do Cálculo Estocástico tem como base o cálculo generalizado a processos estocásticos. Iniciamos o estudo deste tema pelas referências [1] e [2], uma vez que, [1] apresenta uma variedade de aplicações com ênfase em Equações Diferenciais Estocásticas e [2] apresenta o conteúdo de forma mais acessível e com diversos exercícios. Neste trabalho, apresentaremos a fórmula de Itô para o Movimento Browniano. O *Movimento Browniano* $W(t)$ é um processo estocástico específico, que é o protagonista em matemática financeira e em equações diferenciais estocásticas. Para qualquer função contínua diferenciável $x(t)$ tal que $x(0) = 0$ satisfaz as igualdades $x(T)^2 = 2\int_0^T x(t)dx(t)$, $x(T)^3 = 3\int_0^T x(t)^2 dx(t)$, em que $dx(t)$ é simplesmente uma abreviação para $x'(t)dt$ e as integrais são integrais de Riemann. Fórmulas semelhantes são obtidas para o movimento Browniano $W(T)$:

$$W(T)^2 = \int_0^T dt + 2\int_0^T W(t)dW(t), W(T)^3 = 3\int_0^T W(t)dt + 3\int_0^T W(T)^2 dW(t).$$

Aqui, as integrais estocásticas se assemelham às expressões correspondentes para uma função suave $x(t)$, mas há também os termos intrigantes $\int_0^T dt$ e $3\int_0^T W(t)dt$. As fórmulas para $W(T)^2$ e $W(T)^3$ são exemplos muito mais gerais da **fórmula de Itô**, uma ferramenta crucial para calcular integrais estocásticas. Termos como $\int_0^T dt$ e $3\int_0^T W(t)dt$, que não são análogos no cálculo clássico de funções suave, são uma característica inerente à fórmula de Itô e referidos como a **correção de Itô.**

2 Desenvolvimento

A classe de processos que irão compor a fórmula de Itô é definida a seguir.

Definição 2.1 Um processo estocástico $\xi(t)$, $t \geq 0$ é chamado um **processo de Itô** se ele possui caminhos contínuos q.c. e pode ser representado como

$$\xi(T) = \xi(0) + \int_0^T a(t)\ dt + \int_0^T b(t)\ dW(t)\ q.c., \tag{1}$$

em que $b(t)$ é um processo pertencente a M_T^2 (veja capítulo 7 de [2]) para todo $T > 0$ e $a(t)$ é um processo adaptado a filtração $\mathcal{F}_t$ tal que

$$\int_0^T |a(t)|dt < \infty \ \text{ q.c.} \tag{2}$$

[1]rebeca.silva@im.ufal.br

para todo $T \geq 0$. A classe de todos os processos $a(t)$ satisfazendo (2) para algum $T > 0$ será denotada por $\mathcal{L}_T^1$.

Para um processo de Itô ξ é possível escrever (1) como $d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$ e chamar $d\xi(t)$ a **diferencial estocástica** de $\xi(t)$. Isto é conhecido como a **notação diferencial de Itô**. Deve ser enfatizado que a diferencial estocástica deve ser sempre entendida no contexto da rigorosa equação (1). A notação diferencial de Itô é um meio eficiente de escrever esta equação, ao invés de uma tentativa de dar um significado preciso à diferencial estocástica.

3 Fórmula de Itô

Teorema 3.1[Fórmula de Itô, versão simplificada] (Cap. 7, seção 4 de [2])

Suponha que $F(t,x)$ é uma função de valor real com derivadas parciais contínuas $F_t'(t,x)$, $F_x'(t,x)$ e $F_{xx}''(t,x)$ para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Vamos assumir também que o processo $F_x'(t, W(t))$ pertence a M_T^2 para todo $T \geq 0$. Então $F(t, W(t))$ é um processo de Itô tal que

$$F(T, W(T)) - F(0, W(0)) = \int_0^T \left(F_t'(t, W(t)) + \frac{1}{2} F_{xx}''(t, W(t)) \right) dt + \int_0^T F_x'(t, W(t)) dW(t) \quad \text{q.c.} \tag{3}$$

Em notação diferencial, esta fórmula pode ser escrita como

$$dF(t, W(t)) = \left(F_t'(t, W(t)) + \frac{1}{2} F_{xx}''(t, W(t)) \right) dt + F_x'(t, W(t)) dW(t). \tag{4}$$

4 Exemplo de Processo de Itô

Seja $X(t)$ um processo estocástico em que $X(t) = W(t) + 4t$. Para que $X(t)$ seja um processo de Itô, basta mostrar que ele pode ser escrito da forma (1). Para chegar a esse resultado, utilizaremos o Teorema 3.1. Como $X(T) = W(T) + 4T$, temos $F(t,x) = x + 4t$, $F_t'(t,x) = 4$, $F_x'(t,x) = 1$ e $F_{xx}''(t,x) = 0$, para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Temos também $F_x'(t, W(t)) \in M_T^2$ para todo $T \geq 0$. Então $X(T)$ é um processo de Itô, pois

$$X(T) = F(T, W(T)) = 0 + \int_0^T 4\ dt + \int_0^T 1\ dW(t). \tag{5}$$

Pretendemos continuar o estudo de processos de Itô para provar a fórmula de Itô para um processo de Itô que depende do movimento Browniano. Com isso, esperamos consolidar os conhecimentos neste tema com vistas a contribuir de forma significativa na resolução de problemas atuais relacionados com este tema.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pela concessão da bolsa de Iniciação Científica (IC) no Instituto de Matemática - UFAL. Também agradeço aos professores Isnaldo Isaac e Alan Pereira pelo apoio, acompanhamento e incentivo durante todo o projeto.

Referências

[1] Oksendal, B. *Stochastic Difierential Equations, An Introduction with Applications*, Springer, New York, 2000.

[2] BRZEZNIAK, Z. & ZASTAWNIAK, T. *Basic Stochastic Processes – A Course Through Exercises*, Springer undergraduate mathematics series.

