Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Método de diferenças finitas aplicado ao modelo de Black-Scholes para precificação do prêmio de opções europeias

Fernando Guirra Silva[1]
Matemática Industrial/UFES, São Mateus, ES
Sérgio Souza Bento[2]
DMA/UFES, São Mateus, ES

1 Introdução

Atualmente o cenário está desfavorável para certos tipos de investimentos devido à taxa básica que rege o sistema financeiro. A baixa da inflação e a baixa da taxa Selic[3] faz com que a poupança tenha um retorno real negativo. Nesse cenário é mais atrativo a renda variável, uma forma de investimento que varia apresentando volatilidade e risco. Quanto maior o risco maiores são as chances de retorno ou prejuízo. Considerando essa volatilidade da renda variável é interessante fazer um gerenciamento de risco e uma das formas de efetuar esse controle são as opções, onde você define previamente o risco aceitável – uma espécie de seguro.

Dentre as classes de investimentos encontram-se os derivativos que são contratos que derivam o seu valor de um ativo subjacente a fim de proporcionar aos agentes econômicos operações que viabilizem a transferência de risco das flutuações do preço do ativo. Os derivados são ativos financeiros que estão sendo muito procurados atualmente devido seu retorno com o baixo risco por parte dos investidores. Dentre os derivativos abordaremos o mercado de opções, que negocia o direito de comprar ou vender um ativo por um preço pré-estabelecido em uma data futura.

2 Modelo de Black-Scholes

O modelo proposto por Black-Scholes [1] modela a precificação do prêmio de opções. Suponha que $c = c(S,t)$ denota o prêmio de uma opção europeia de compra, assim a equação de Black-Scholes [1] fica definida como

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS\frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} - rc = 0. \tag{1}$$

Considerando uma opção europeia com vencimento T e preço de exercício E, onde a variação do preço S é maior ou igual a zero e o tempo t varia entre zero e o tempo final T. Com condição final, $c(S,T) = (S-E)^+$ e condição de limitação para a solução, $c(S,t) \leq S$. De maneira análoga, denotando por $p = p(S,t)$ a solução da equação de Black-Scholes para o prêmio de opção europeia de venda, segue que

$$\frac{\partial p}{\partial t} + rS\frac{\partial p}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} - rp = 0, \tag{2}$$

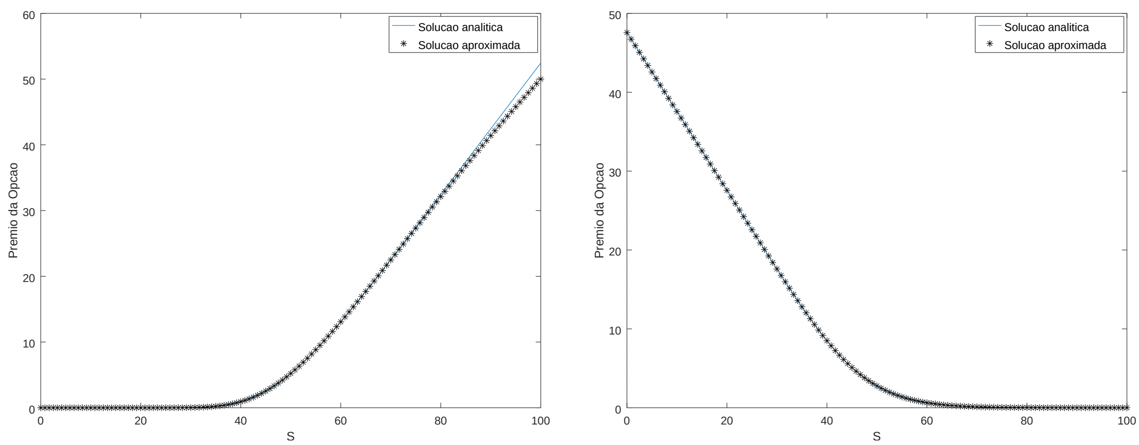
[1]fernando.guirra@hotmail.com.
[2]sergio.bento@ufes.br.
[3]Sistema Especial de Liquidação e Custódia.

com as seguintes condições [3]: $p(S,0) = (E - S)^+$ e $p(S,t) \leq Ee^{-r(T-t)}$.

3 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentadas as simulações numéricas do modelo de Black-Scholes para precificação de prêmio de opções europeias. As equações (1) e (2) foram discretizadas utilizando o método de diferenças finitas [2]. Os parâmetros utilizados na realização dos testes foram baseados no tempo de maturidade $T = 1$, dado em ano. Assim, a taxa de juros r e a taxa de volatilidade σ são dadas em anos, ou seja, $r = 5\%/\text{ano}$, $\sigma = 2\%/ano$, $E = \$50$.

A Figura 1(a) mostra a solução aproximada dada pelo método Crank-Nicolson e a respectiva solução analítica [3] que simulam o prêmio para opção de compra de um determinado ativo. Podemos observar uma boa concordância da solução aproximada com a solução analítica exceto nas proximidades de uma fronteira onde, possivelmente, não está bem modelada a condição neste contorno. A Figura 1(b) apresenta a solução aproximada também pelo método de Crank-Nicolson comparada com a solução analítica. Neste caso, também é possível observar que há boa concordância com a solução analítica. No trabalho também foi calculado o erro na norma L_2 e realizada estimativas de taxa de convergência, que ficaram de acordo com a teoria.



(a) Prêmio de opção de compra

(b) Prêmio de opção de venda

Figura 1: Simulação do prêmio para opção de compra (a) e para opção de venda (b).

Referências

[1] Black, F. and Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 1973. DOI: 10.1086/260062.

[2] Cuminato, J. A. and Junior, M .M. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. SBM, 2013.

[3] Oliveira, S. P. Métodos Numéricos para Precificação de Opções, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 1998.

