

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Otimização Topológica Estrutural Baseada em Confiabilidade com Restrição em Tensão Utilizando o Conceito de Derivada Topológica

Renatha B dos Santos¹

Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, Petrópolis, RJ

Antonio A Novotny²

Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, Petrópolis, RJ

André J Torii³

Universidade Federal da Paraíba, UFPB, João Pessoa, PB

Resumo. Em otimização estrutural os resultados obtidos devem ser robustos em relação a incertezas, sejam elas oriundas da natureza probabilística das variáveis de trabalho ou àquelas inerentes à resistência dos materiais, por exemplo. Este fato tem levado ao desenvolvimento de diferentes metodologias de otimização estrutural baseada em incertezas. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é propor uma nova formulação para o problema de otimização topológica estrutural baseada em confiabilidade com restrição em tensão. Buscam-se então estruturas de volume mínimo que atendam simultaneamente aos critérios de resistência e confiabilidade estruturais.

Palavras-chave. Confiabilidade, Restrição em Tensão, Derivada Topológica

1 Introdução

Em otimização topológica estrutural buscam-se estruturas (topologias) ótimas de acordo com um dado aspecto partindo-se de uma geometria definida e de um material escolhido. Um desses aspectos trata de um antigo desafio da engenharia e consiste em desenhar uma estrutura com mínimo volume capaz de resistir às tensões oriundas dos carregamentos aplicados. Diversas técnicas de otimização foram empregadas na solução de tal problema, dentre as quais destacam-se os métodos baseados no conceito de derivada topológica. Este conceito permite o desenvolvimento de algoritmos de otimização topológica bastante eficientes, ver por exemplo [5].

Uma abordagem importante na otimização estrutural é considerar que os resultados obtidos sejam robustos em relação a incertezas, sejam elas oriundas da natureza probabilística dos carregamentos ou àquelas inerentes à resistência dos materiais, por exemplo.

¹renatha@lncc.br

²novotny@lncc.br

³andre@ci.ufpb.br

Classicamente, levar em conta incertezas em um projeto de estruturas significava utilizar um fator de segurança. No entanto, tal abordagem pode ser bastante limitada em uma grande variedade de casos ou ainda conduzir a resultados muito conservativos. Este fato tem levado ao desenvolvimento de diferentes técnicas de otimização estrutural baseadas em incertezas, tais como otimização robusta [2] e otimização baseada em confiabilidade (RBDO - *Reliability-Based Design Optimization*) [4].

Neste trabalho objetiva-se propor uma nova formulação para o problema de otimização topológica estrutural baseada em confiabilidade que consiste na minimização do volume de uma estrutura com restrição em tensão levando-se em conta incertezas nos dados.

2 Formulação Determinística do Problema de Otimização

O problema determinístico de minimização do volume estrutural com restrição em tensão pode ser formulado como a seguir. Considere $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ um domínio aberto e limitado com fronteira Γ , e também um subdomínio $\Omega \subset \mathcal{D}$. Assim, o problema de otimização estudado pode ser descrito como: Encontrar $\Omega^d \subset \mathcal{D}$, tal que

$$\begin{cases} \text{Minimize } |\Omega|, \\ \text{sujeito a: } g_\Omega \leq 0, \text{ q.s. } \Omega^* \subset \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

com $\Omega = \Omega^* \cup \omega \subset \mathcal{D}$, onde o subdomínio Ω^* representa a parte de Ω onde é imposta a restrição em tensão, já ω representa a parte de Ω onde a restrição em tensão não pode ser imposta. Alguns termos acima necessitam explicação: $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω , isto é o volume da estrutura, além disso, a restrição g_Ω é definida como

$$g_\Omega = \sigma_M - \bar{\sigma}, \quad (2)$$

onde σ_M é a tensão de von Mises dada por

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbb{B} \sigma \cdot \sigma} \quad \text{com} \quad \mathbb{B} = 3\mathbb{I} - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (3)$$

sendo \mathbb{I} e \mathbb{II} os tensores identidades de segunda e quarta ordem respectivamente e σ usado para denotar o tensor tensão. Tem-se ainda a relação constitutiva linear escrita como

$$\sigma = \rho \mathbb{C} \varepsilon, \quad (4)$$

onde ε é o tensor das deformações ou tensor Green linearizado e \mathbb{C} o tensor constitutivo de Hooke definido por

$$\mathbb{C} = 2\mu \mathbb{II} + \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (5)$$

com μ e λ os coeficientes de Lamé, ambos considerados constantes em todo domínio. Para completar a formulação do problema de minimização resta definir a função contínua por partes ρ :

$$\rho(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega, \\ \rho_0, & \text{se } x \in \mathcal{D} \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (6)$$

com $\rho_0 \ll 1$ usado para simular vazios.

3 Formulação do Problema de Otimização Baseada em Confiabilidade

Considere agora que algum parâmetro, x_i , do problema não é totalmente conhecido, ou ainda, sua intensidade possui algum nível de incerteza. Então, tal parâmetro não pode ser mais tratado como um parâmetro determinístico, sendo este modelado como uma variável aleatória. Neste contexto, o problema se resolvido de forma determinística tende a gerar resultados ineficientes na prática.

Seja $\mathbf{x} = [x_i], i > 0$ um vetor que contém todos os parâmetros incertos do problema, x_i , a serem considerados. Note que, ao considerar os dados de entrada (parâmetros) do problema como variáveis aleatórias, a restrição g_Ω torna-se também uma variável aleatória e daí escreve-se $g_\Omega := g_\Omega(\mathbf{x})$. Portanto, assume-se que a probabilidade da restrição $g_\Omega(\mathbf{x})$ ser violada deve ser menor que uma probabilidade de falha admissível, P_{max} , logo

$$P(g_\Omega(\mathbf{x}) > 0) \leq P_{max}, \tag{7}$$

onde $P(\cdot)$ é a probabilidade de um dado evento ocorrer. O problema de otimização baseada em confiabilidade, também conhecido na literatura como problema de *RBDO - Reliability-Based Design Optimization* é dado por: Encontrar $\Omega^p \subset \mathcal{D}$, tal que

$$\begin{cases} \text{Minimize } |\Omega|, \\ \Omega \subset \mathcal{D} \\ \text{sujeito a: } P(g_\Omega(\mathbf{x}) > 0) \leq P_{max}. \end{cases} \tag{8}$$

Observe que a superfície definida por $g_\Omega(\mathbf{x}) = 0$ divide o espaço probabilístico em duas regiões: uma região segura (S), para $g_\Omega(\mathbf{x}) < 0$ e uma região de falha (F), definida por $g_\Omega(\mathbf{x}) > 0$. A relação $g_\Omega(\mathbf{x}) = 0$ é ainda conhecida na literatura com função de estado limite.

3.1 Abordagem Baseada no Índice de Confiabilidade

Na prática, calcular a probabilidade de falha

$$P(g_\Omega(\mathbf{x}) > 0) = \int_{g_\Omega(\mathbf{x}) > 0} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{9}$$

onde $\phi(\mathbf{x})$ é a função de densidade de probabilidade da variável aleatória \mathbf{x} , é muito difícil, as vezes impossível. Assim, ao longo dos anos foram desenvolvidos vários métodos a fim de aproximar tal probabilidade, entre eles destaca-se o método *FORM - First Order Reliability Method*, originalmente desenvolvido para variáveis Gaussianas, que forma a base de diversos métodos de otimização baseada em confiabilidade.

Ao utilizar o método *FORM*, a integral em (9) é aproximada no espaço normalizado padrão, através da transformação $T : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{v}$ tal que

$$v_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{s_i}, \tag{10}$$

onde \bar{x}_i e s_i são as médias e os desvios padrões das variáveis aleatórias x_i . Caso as variáveis não possuam distribuição Gaussiana podem ser utilizadas transformações equivalentes [4]. Neste novo espaço, o ponto mais provável de falha *MPP - Most Probable Point* é aquele com menor distância da origem até a região de falha (F), detalhes na Figura 1.

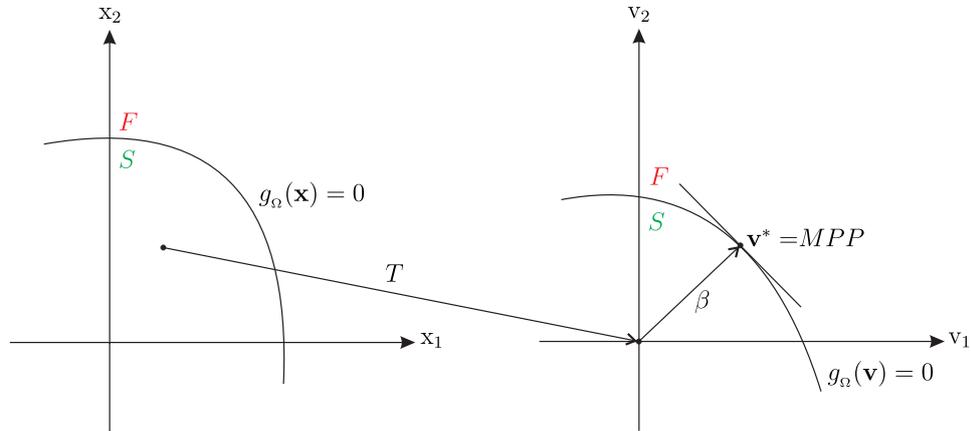


Figura 1: Método *FORM*

O índice de confiabilidade β é então definido como a distância entre a origem no espaço normalizado e o MPP, e é calculado a partir do seguinte problema de análise de confiabilidade: Encontrar $\mathbf{v}^* \in \mathbb{R}^m$, tal que

$$\begin{cases} \text{Minimize } \|\mathbf{v}\|, \\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \\ \text{sujeito a: } g_{\Omega}(T^{-1}(\mathbf{v})) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Ao utilizar um índice de confiabilidade para aproximar a probabilidade de falha $P(g(\mathbf{x}) > 0)$ constitui-se uma abordagem conhecida na literatura como *RIA - Reliability Index Approach*. O índice de confiabilidade é então dado por $\beta = \|\mathbf{v}^*\|$, onde \mathbf{v}^* solução do problema de análise de confiabilidade (11) é o ponto mais provável de falha (MPP).

Assim o problema de otimização baseada em confiabilidade (8) pode ser reescrito como: Encontrar $\Omega^p \subset \mathcal{D}$, tal que

$$\begin{cases} \text{Minimize } |\Omega|, \\ \Omega \subset \mathcal{D} \\ \text{sujeito a: } \beta \geq \beta_{min}, \end{cases} \quad (12)$$

onde β_{min} é um índice de confiabilidade mínimo a ser respeitado.

3.2 Abordagem Baseada em Medida de Performance

O problema de análise de confiabilidade (11) resultante da abordagem baseada no índice de confiabilidade é mal condicionado, o que leva a problemas de convergência [4].

Assim, como forma de facilitar o processo de otimização, o problema (12) pode ser substituído pelo seguinte: Encontrar $\Omega^p \subset \mathcal{D}$, tal que

$$\begin{cases} \text{Minimize } |\Omega|, \\ \Omega \subset \mathcal{D} \\ \text{sujeito a: } g_{\Omega}(\mathbf{x}^*) \leq 0, \end{cases} \quad (13)$$

onde $\mathbf{x}^* = \max g_{\Omega}(T^{-1}(\mathbf{v}))$ com $\|\mathbf{v}\| = \beta_{min}$, ou seja, \mathbf{x}^* deve ser solução do seguinte problema de análise de confiabilidade inversa [4]: Encontrar $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$, tal que

$$\begin{cases} \text{Maximize } g_{\Omega}(T^{-1}(\mathbf{v})), \\ \text{sujeito a: } \|\mathbf{v}\| = \beta_{min}. \end{cases} \quad (14)$$

Esta abordagem é conhecida na literatura como *PMA -Performance Measure Approach*. A solução do problema (14) é o ponto que maximiza a função de estado limite g com distância igual ao mínimo permitido pelo índice β_{min} . Consequentemente, pode ser visto como o pior cenário dentre todos os pontos de distância β_{min} da origem do espaço normalizado. A restrição do problema (13) impõe que o pior caso deve respeitar a restrição original.

3.3 Estratégia de Desacoplamento - Método *SORA*

Neste trabalho será adotada uma estratégia de desacoplamento do problema de otimização baseada em confiabilidade através do método *SORA - Sequential Optimization and Reliability Assessment*, que foi introduzido na literatura por [3]. Neste contexto, uma estratégia de desacoplamento consiste em não ter que resolver concomitantemente o problema de análise de confiabilidade (14) e o problema de otimização estrutural (13).

Primeiramente define-se a solução do problema (13) como o par (Ω^p, \mathbf{x}^p) . Vale ressaltar a seguinte diferença de notação, note que \mathbf{x}^* é definido como um pior cenário obtido para uma topologia arbitrária, enquanto \mathbf{x}^p é definido como o pior cenário obtido com a topologia ótima Ω^p .

Suponha que a solução \mathbf{x}^p seja conhecida. Assim, não é necessário resolver o problema de maximização (14) antes do problema de minimização (13). Neste caso, a topologia ótima Ω^p pode ser obtida diretamente tomando \mathbf{x}^p no problema (13). Ou seja, uma vez que o pior cenário \mathbf{x}^p é conhecido, o problema (13) torna-se um problema de otimização determinística. Por outro lado, se a topologia ótima Ω^p é conhecida, o pior cenário dada tal topologia pode ser diretamente encontrado através do problema (14) em cada ponto do domínio.

Na prática, nem Ω^p ou \mathbf{x}^p são conhecidos a priori, a menos que o problema já esteja resolvido. Entretanto, é possível partir de aproximações iniciais e realizar atualizações iterativamente até encontrar soluções com acurácia desejada. Considere (k) um número genérico de iterações, então um algoritmo iterativo para resolver o problema de Otimização Topológica Baseada em Confiabilidade pode ser resumido como apresentado em Algoritmo 1. O processo é iniciado com uma topologia arbitrária dada $\Omega^{(0)}$. Com essa topologia encontra-se o pior cenário $\mathbf{x}^{(0)}$ para cada ponto de interesse resolvendo (14). Agora, com o pior cenário $\mathbf{x}^{(0)}$ encontra-se uma nova topologia $\Omega^{(1)}$ resolvendo (13) e assim sucessivamente, até atingir convergência.

Algoritmo 1: Algoritmo Alternado de Otimização Baseada em Confiabilidade

input : Topologia inicial $\Omega^{(0)}$
output: (Ω^p, \mathbf{x}^p)

- 1 Inicialize $k \leftarrow 0$;
- 2 Encontre $\mathbf{x}^{(0)}$ resolvendo (14) com $\Omega = \Omega^{(0)}$;
- 3 **while** *convergência não alcançada* **do**
- 4 Atualize $k \leftarrow k + 1$;
- 5 Encontre $\Omega^{(k)}$ resolvendo (13) com $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k-1)}$;
- 6 Encontre $\mathbf{x}^{(k)}$ resolvendo (14) com $\Omega = \Omega^{(k)}$;
- 7 **end while**
- 8 Retorne a solução (Ω^p, \mathbf{x}^p) .

4 Experimentos Numéricos

Na obtenção dos resultados numéricos, o algoritmo de otimização estrutural proposto por [1] baseado em derivada topológica e representação do domínio por função level-set é utilizado na solução do problema (13) com $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k-1)}$ fixo, necessário no passo **3** linha **5** do Algoritmo 1 na Seção 3.3. Além disso a solução do problema (14) com $\Omega = \Omega^{(k)}$ fixo, necessário no passo **3** linha **6** do Algoritmo 1, é obtida através do método proposto por [6] conhecido como *AMV - Advanced Mean Value*. Ainda nos exemplos numéricos foram utilizados os seguintes parâmetros: módulo de Young $E = 1.0$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, enquanto o contraste $\rho_0 = 10^{-4}$. O índice de confiabilidade utilizado foi $\beta_{min} = 2.0$. Além disso consideramos incertezas na intensidade dos carregamentos aplicados e/ou na tensão admissível. Finalmente, a implementação computacional foi realizada em MATLAB onde utilizou-se o Método de Elementos Finitos via elementos triangulares lineares. Os experimentos apresentados foram realizados numa máquina com sistema operacional Windows 7, 8GB de memória RAM e processador Intel i5.

Considere um painel quadrado 1×1 engastado na parte superior e submetido a um par de carregamentos, veja a Figura 2. Tais carregamentos são aplicados no meio da borda inferior e são tais que $q_1 = (2.0, -1.0)$ e $q_2 = (-2.0, -1.0)$. O domínio inicial é discretizado em uma malha uniforme com 6400 elementos e 3281 nós. Se o problema de otimização é

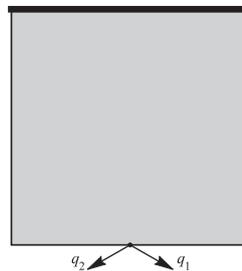


Figura 2: Domínio inicial e condições de contorno.

resolvido considerando todos os parâmetros determinísticos, a topologia ótima obtida após

63 iterações com 27% de fração de volume é aquela mostrada na Figura 3(a). Assumindo que a intensidade dos carregamentos possuem incertezas, a estrutura final pode ser vista na Figura 3(b) e foi obtida após 38 iterações com 48% de fração de volume. Ao passo que ao considerar incertos tanto a intensidade dos carregamentos quanto a tensão limite do material, o resultado pode ser visto na Figura 3(c), sua obtenção deu-se após 52 iterações com 52% de fração de volume.

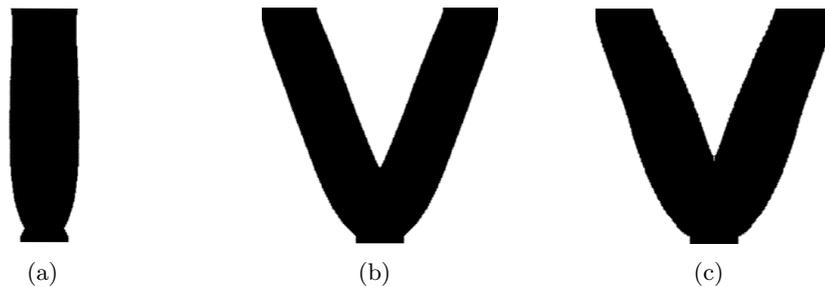


Figura 3: Resultados obtidos utilizando (a) parâmetros determinísticos, (b) carregamentos incertos e (c) carregamentos e tensão admissível incertos.

5 Conclusão

Neste trabalho foi proposta uma nova formulação para o problema de otimização topológica estrutural baseada em confiabilidade com restrição em tensão utilizando o conceito de derivada topológica. Os resultados numéricos apresentados mostraram a aplicabilidade e robustez da formulação proposta.

Referências

- [1] S. Amstutz and H. André. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 216(2):573–588, 2006.
- [2] H. Beyer and B. Sendhoff. Robust optimization – a comprehensive survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33–34):3190–3218, 2007.
- [3] X. Du and W. Chen. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design. *ASME Journal of Mechanical Design*, 126(2):225–233, 2004.
- [4] R. H. Lopez and A. T. Beck. Reliability-based design optimization strategies based on form: a review. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 34(4), 2012.
- [5] A. A. Novotny and J. Sokołowski. *Topological derivatives in shape optimization*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer, 2013.
- [6] Y.T. Wu, T. A. Cruse, and H. R. Millwater. Advanced probabilistic structural analysis method for implicit performance functions. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 28(9):1663–1669, 1990.