
Homogeneização Assintótica de um Problema Elíptico Multidimensional sobre um Meio Linear Microperiódico

Marcos Pinheiro de Lima¹

Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre, RS

Leslie D. Pérez-Fernández²

Departamento de Matemática e Estatística, UFPel, Pelotas, RS

Julián Bravo-Castillero³

Faculdade de Matemática e Computação, Universidade de Havana, Cuba

Resumo. O método de homogeneização assintótica é aplicado ao problema da distribuição de um campo térmico estacionário sobre um meio micro-heterogêneo e periódico com comportamento constitutivo linear e na presença de uma fonte de calor. Obtêm-se os coeficientes efetivos da condutividade e os problemas locais e homogeneizado, os quais permitem construir uma solução assintótica formal do problema original. Mediante um exemplo, ilustra-se a proximidade entre as soluções assintótica e homogeneizada.

Palavras-chave. Meios Micro-heterogêneos e Periódicos, Coeficientes Efetivos, Método de Homogeneização Assintótica

1 Introdução

Neste trabalho, estuda-se o comportamento efetivo de meios micro-heterogêneos e periódicos cujas propriedades físicas variam continuamente com relação à posição. Meios periódicos são aqueles nos quais a heterogeneidade pode ser reproduzida mediante a replicação periódica de um elemento recorrente Y chamado de célula básica. Tais meios apresentam separação de escalas estruturais caracterizada pelo parâmetro $\varepsilon = l/L$, $0 < \varepsilon \ll 1$, onde l e L são, respectivamente, os comprimentos característicos da microescala e a macroescala. Assume-se também que o meio satisfaz a hipótese do contínuo, ou seja, que l é muito maior que o comprimento característico da escala molecular. Assim, o meio heterogêneo pode ser visto como um contínuo na microescala, e propriedades efetivas podem lhe ser atribuídas [1]. Mais precisamente, a hipótese de homogeneidade equivalente estabelece que, na macroescala, o meio heterogêneo é fisicamente equivalente a um meio homogêneo, tal que as propriedades efetivas do primeiro são as propriedades do segundo [2]. Ao processo de obtenção de tais propriedades efetivas dá-se o nome de homogeneização.

Fenômenos que ocorrem em meios micro-heterogêneos são descritos por problemas de valores de contorno e iniciais cujas equações diferenciais tem coeficientes rapidamente

¹marcos.p.lima@hotmail.com

²leslie.fernandez@ufpel.edu.br

³jbravo@matcom.uh.cu

oscilantes, enquanto as equações dos problemas para o meio homogêneo equivalente tem coeficientes constantes [2]. Assim, a hipótese de homogeneidade equivalente será válida se a solução u^ε do problema para o meio heterogêneo é ε -próxima da solução u_0 do problema para o meio homogêneo associado com relação a alguma norma, isto é, $\|u^\varepsilon - u_0\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Neste trabalho, estuda-se o seguinte problema elíptico: Encontrar $u^\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega} = [0, 1]^d$, tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jl}^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_l} \right) = f(x), & x \in \Omega, \\ u^\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde $a_{jl}^\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ são εY -periódicas, $Y = [0, 1]^d$, e tais que $a_{jl}^\varepsilon(x) = a_{ij}^\varepsilon(x)$ para todo $x \in \Omega$ (simetria) e $\forall \eta \in \mathbb{R}^d, \exists c > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^d, a_{jl}(y)\eta_j\eta_l \geq c\eta_l\eta_l$ (caráter definido positivo). Em (1) adotou-se a notação de Einstein para a soma por índices repetidos com $j, l = 1, 2, \dots, d$.

O problema (1) modela a distribuição de um campo térmico estacionário u^ε sobre um meio micro-heterogêneo e periódico com condutividades $a_{jl}^\varepsilon(x) = a_{jl}(x/\varepsilon)$ na presença de uma fonte de calor f . Observe que este problema é, no geral, difícil de resolver analiticamente, enquanto uma abordagem numérica direta requer de uma discretização muito fina do domínio para capturar o comportamento rapidamente oscilante dos coeficientes $a_{jl}^\varepsilon(x)$, o qual aumenta consideravelmente o custo computacional e compromete a convergência do método numérico adotado. Uma alternativa eficaz e matematicamente rigorosa é o método de homogeneização assintótica (MHA) [2]. Formalmente, o MHA propõe uma solução assintótica formal do problema original, ou seja, uma série assintótica de potências de ε ,

$$u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, y), \quad y = x/\varepsilon, \quad (2)$$

a qual, em presença de linearidade, é uma expansão assintótica da solução exata do problema: $u^\varepsilon \sim u^{(\infty)}$. Os coeficientes u_i das potências de ε são funções Y -periódicas em y e duas vezes continuamente diferenciáveis obtidas de uma sequência recorrente de problemas que resulta de substituir (2) no problema original (1).

2 Aplicação do MHA

Considere uma solução assintótica formal $u^{(2)}$ do problema (1) obtida de truncar (2) no termo de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, ou seja,

$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = x/\varepsilon, \quad (3)$$

onde $u_i \in C^2(\Omega \times Y)$ são Y -periódicas em y .

Ao substituir (3) na equação de (1) e aplicar a regra da cadeia $\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial y_j} \Big|_{y=x/\varepsilon}$,

e ainda, considerar o operador $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial}{\partial \beta_l} \right)$, $\alpha, \beta \in \{x, y\}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon u^{(2)} - f(x) &= \varepsilon^{-2} \mathcal{L}_{yy} u_0 + \varepsilon^{-1} (\mathcal{L}_{xy} u_0 + \mathcal{L}_{yx} u_0 + \mathcal{L}_{yy} u_1) \\ &+ \varepsilon^0 (\mathcal{L}_{xx} u_0 + \mathcal{L}_{xy} u_1 + \mathcal{L}_{yx} u_1 + \mathcal{L}_{yy} u_2 - f(x)) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4)$$

Logo, para que $u^{(2)}$ seja uma solução assintótica formal de (1), a seguinte sequência recorrente de equações deve ser satisfeita:

$$\varepsilon^{-2} : \mathcal{L}_{yy}u_0 = 0 \tag{5}$$

$$\varepsilon^{-1} : \mathcal{L}_{yy}u_1 = -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0 \tag{6}$$

$$\varepsilon^0 : \mathcal{L}_{yy}u_2 = -\mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 + f(x). \tag{7}$$

O seguinte Lema [2] garante a existência de soluções u_i Y -periódicas de (5)-(7):

Lema 2.1. *Sejam $a_{ij}(y)$ e $F(y)$ funções diferenciáveis Y -periódicas, e $a_{ij}(y)$ satisfaz as condições de simetria e positividade. Então, existe N solução Y -periódica da equação*

$$\mathcal{L}_{yy}N \equiv \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial N}{\partial y_l} \right) = F(y), \tag{8}$$

se e somente se $\langle F(y) \rangle \equiv \int_Y F(y)dy = 0$. Tal solução é única salvo uma constante aditiva, ou seja, $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, onde $\tilde{N}(y)$ é a solução Y -periódica de (8) que tem média nula sobre o período, $\langle \tilde{N} \rangle = 0$, e C é uma constante arbitrária.

A aplicação do Lema 2.1 em (5) implica que u_0 não depende da variável y , ou seja,

$$u_0(x, y) = u_0(x). \tag{9}$$

De considerar (9) em (6) e aplicar o Lema 2.1 segue existe u_1 Y -periódica em y dada por

$$u_1(x, y) = N_p(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_p}, \tag{10}$$

onde $N_p(y)$ é solução do problema local

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jp}(y) + a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} \right) = 0, & y \in Y, \\ \langle N_p(y) \rangle = 0. \end{cases} \tag{11}$$

De aplicar o Lema 2.1 em (7), obtém-se que a condição necessária e suficiente para a existência de u_2 Y -periódica solução de (7) é a chamada equação do problema homogeneizado, o qual é formulado como: Encontrar $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \hat{a}_{jp} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_p} = f(x), & x \in \Omega \\ u_0(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{12}$$

onde \hat{a}_{jp} são os coeficientes efetivos

$$\hat{a}_{jp} = \left\langle a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} + a_{jp}(y) \right\rangle. \tag{13}$$

Note que de substituir a equação de (12) em (7) obtém-se u_2 da forma

$$u_2(x, y) = N_{pq}(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_q}. \quad (14)$$

Portanto, dos resultados fundamentais obtidos na construção de uma solução assintótica formal de (1), tem-se a expressão de $u^{(2)}$ da forma

$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_p} + \varepsilon^2 N_{pq} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_q}. \quad (15)$$

Na prática, basta obter u_0 e u_1 , pois é possível provar que $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Mas para obter u_2 , basta substituir a equação de (12) e (14) em (7) para definir um segundo problema local em que busca-se N_{pq} .

É possível provar que os coeficientes efetivos \hat{a}_{jp} dados por (13) preservam a simetria e o carácter definido positivo dos coeficientes do problema original, o qual constitui uma ferramenta de controle dos cálculos realizados. Finalmente, é possível provar, mediante o princípio do máximo generalizado para equações elípticas [2], que $\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$.

3 Exemplo

Seja $d = 3$, e considere o problema (1) para um meio micro-heterogêneo εY -periódico e isotrópico, isto é, $a_{jl}^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x) \delta_{jl}$, com $a(y) = 1 + 0.25 \text{sen}(2\pi y_1) \text{sen}(2\pi y_2)$ e $f(x) = -1$.

Para este problema, resolvem-se os problemas (11), (13) e (12), obtidos da homogeneização assintótica. É possível perceber que o primeiro destes problemas é bidimensional do ponto de vista da homogeneização, pois seus problemas locais dependem apenas de y_1 e y_2 , sendo isso uma consequência da propriedade $a^\varepsilon(x)$ depender apenas de x_1 e x_2 . Portanto, de (11) resolve-se o seguinte problema local:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_1} \left(a(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(a(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_2} \right) = -\frac{\partial a}{\partial y_p}, & y \in Y, \\ \langle N_p(y) \rangle = 0, \end{cases} \quad (16)$$

para cada $p = 1, 2, 3$. A equação deste problema é de Poisson bidimensional para $p = 1, 2$ e de Laplace para $p = 3$. Para resolvê-lo, utilizou-se o Método das Diferenças Finitas [3]. Os resultados a seguir foram obtidos para uma malha de 10000 pontos, para cada p . Na Figura 1 estão representadas as soluções dos problemas locais N_p , para $p = 1, 2$, pois para $p = 3$, $N_3(y) = 0$.

As soluções locais N_p foram calculadas assumindo condições de Dirichlet homogêneas no contorno da célula periódica, ou seja, trocou-se a condição $\langle N_p \rangle = 0$ no problema local (11) por $N_p|_{\partial Y} = 0$, para garantir que a solução assintótica $u^{(1)}$ satisfaça exatamente as condições de contorno do problema original. Por outro lado, note que o Lema 2.1 utiliza a condição de média nula para a unicidade. No geral, a escolha diferente para garantir a unicidade das soluções locais só influi qualitativamente no comportamento da solução assintótica na vizinhança do contorno. Mas, a diferença entre as soluções locais

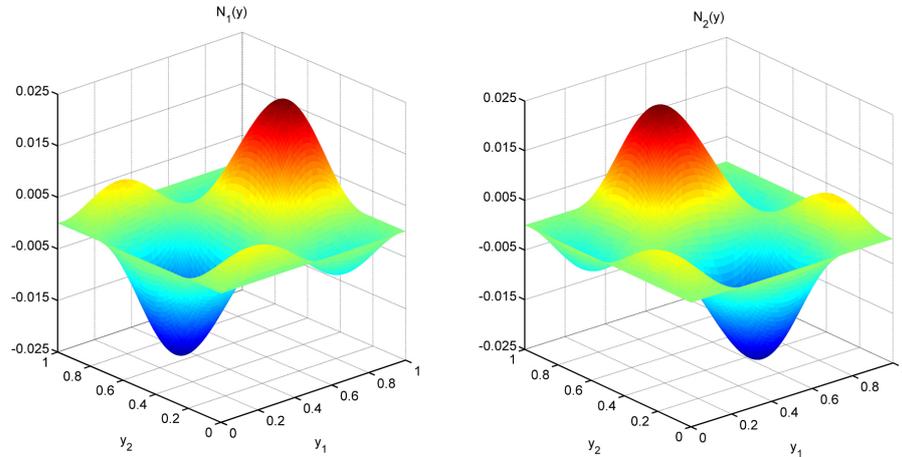


Figura 1: Soluções dos problemas locais N_1 e N_2 , sendo $N_3 = 0$.

obtidas a partir dessas condições diferentes é uma constante aditiva, e como os coeficientes efetivos dependem apenas das derivadas das soluções locais, tal diferença não influi nos seus valores. Mesmo assim, para o exemplo resolvido, após o cálculo das soluções locais com condições homogêneas, se verificou que as médias dessas soluções são muito próximas de zero. Especificamente, $\langle N_1 \rangle = 2.365 \cdot 10^{-5}$, $\langle N_2 \rangle = -2.309 \cdot 10^{-5}$ e $\langle N_3 \rangle = N_3 = 0$. Ainda mais, estes valores tendem a zero quando o passo da discretização tende a zero. Isto quer dizer que as soluções do exemplo apresentado, satisfazem ambas condições para a unicidade, ou seja, se anulam no contorno da célula de periodicidade e tem média nula sobre a célula periódica.

Obtidas as soluções dos problemas locais, é possível calcular os coeficientes efetivos (13). Logo, pelo Método de Simpson - Regra do 1/3 bidimensional [3] calcula-se cada elemento da matriz dos coeficientes efetivos, obtendo-se assim:

$$(\hat{a}_{jp})_{1 \leq j,p \leq 3} = \begin{bmatrix} 0.994587 & 0.000103 & 0 \\ -0.000084 & 0.994607 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Note que esta matriz é definida positiva, e que os elementos fora da diagonal principal são muito próximos de zero, isto é, pode-se assumir que \hat{a}_{jp} satisfaz a condição de simetria. De fato, malhas mais finas produzem valores muito mais próximos de 1 na diagonal principal e de 0 fora dela, respectivamente, mas o custo computacional é também muito maior, podendo conduzir inclusive à não convergência do método numérico. Sendo assim, quando o passo da discretização tende a zero, tem-se que $\hat{a}_{jp} = \delta_{jp}$, que é, evidentemente, simétrica e definida positiva, como esperado. Este resultado pode ser controlado a partir de cotas variacionais para os coeficientes efetivos derivados da energia efetiva linear [2]:

$$\langle a^{-1}(y) \rangle^{-1} \delta_{jp} \leq \hat{a}_{jp} \leq \langle a(y) \rangle \delta_{jp}, \quad (18)$$

onde $\langle a(y) \rangle = 1$ e $\langle a^{-1}(y) \rangle^{-1} = 0.984055$.

Obtidos os coeficientes efetivos, resolve-se o problema homogeneizado (12), que é dado por uma equação de Poisson e condições de Dirichlet homogêneas, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2} = -1, & x \in \Omega \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (19)$$

A solução de (19), obtida por separação de variáveis [4], é

$$u_0(x) = \frac{64}{\pi^5} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(i\pi x_1)\text{sen}(j\pi x_2)\text{sen}(k\pi x_3)}{((2i-1)^2 + (2j-1)^2 + (2k-1)^2)(2i-1)(2j-1)(2k-1)}. \quad (20)$$

Nas Figuras 2 e 3 a seguir, apresentam-se as soluções $u^{(1)}$, u_0 e as diferenças $u^{(1)} - u_0$ para $\varepsilon = 2^{-k}$, $k = 1, 2, 3$, respectivamente:

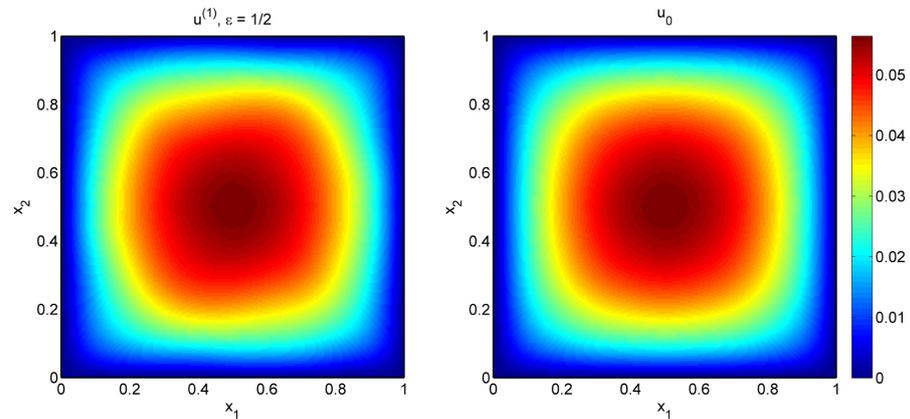


Figura 2: Soluções assintótica (esquerda) e homogeneizada (direita).

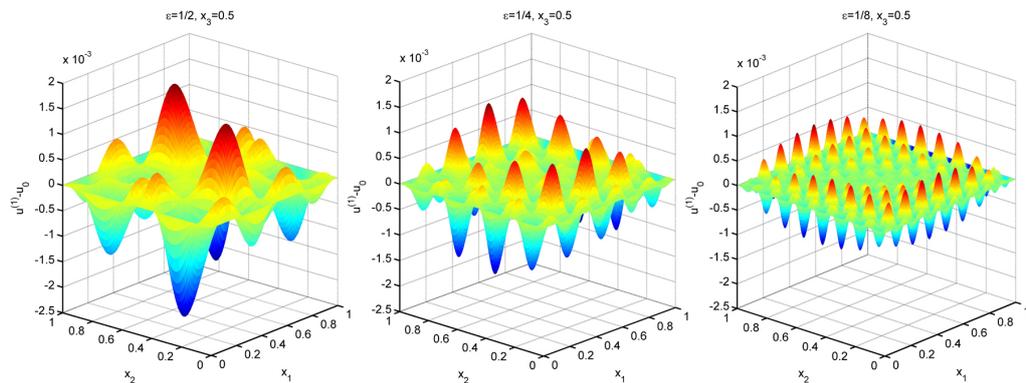


Figura 3: Diferença entre as soluções assintótica e homogeneizada para $\varepsilon = 2^{-k}$, $k = 1, 2, 3$.

Na visualização tridimensional das soluções assintótica e homogeneizada apresentadas na Figura 2 não é possível distinguir as leves diferenças entre elas. No entanto, note que sua representação bidimensional tais diferenças são visíveis. Especificamente, o gráfico da esquerda na Figura 2 apresenta uma pequena assimetria, enquanto o gráfico da direita é perfeitamente simétrico. Mas mesmo assim, ambas soluções são muito próximas, como ilustrado na Figura 3.

4 Conclusões

O exemplo apresentado ilustra de maneira muito clara a necessidade de uma abordagem alternativa (aqui, o MHA) à resolução direta do problema original com coeficientes rapidamente oscilantes. Especificamente, o problema original (1) é tridimensional e com coeficientes rapidamente oscilantes, o qual faz com que uma abordagem direta por um método tradicional, como o método de diferenças finitas empregado aqui, requeira de uma discretização tridimensional extremamente fina do domínio para conseguir capturar a variação rápida dos coeficientes. Isto implica em um alto custo computacional e no comprometimento da convergência do método numérico empregado. Assim, o MHA forneceu uma alternativa na procura da solução deste problema na forma da solução assintótica formal, a qual é muito próxima da solução exata [2]. Ainda mais, do ponto de vista prático, os problemas gerados da aplicação do MHA, ou seja, os problemas homogeneizado e locais, são muito mais simples de serem resolvidos. No exemplo, os problemas locais são bidimensionais e seus coeficientes, mesmo não sendo constantes, não oscilam rapidamente, o qual permitiu que o método de diferenças finitas fosse aplicado com sucesso. Já para o problema homogeneizado, o qual tem coeficientes constantes, foi resolvido analiticamente por separação de variáveis. Por outro lado, a busca da solução exata do problema original requereria de abordagens não tradicionais, como métodos numéricos multiescala.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do projeto CAPES No. 88881.030424/2013-01 intitulado “Desenvolvimento e Aplicações de Métodos Matemáticos de Homogeneização”.

Referências

- [1] S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [2] N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko. *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [3] R. L. Burden and J. D. Faires. *Análise Numérica*. Cengage Learning, São Paulo, 2008.
- [4] H. F. Weinberger. *A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods*. Dover, New York, 1995.