Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise de sensibilidade topológica para problemas de contato com atrito dado

Cinthia Gomes Lopes[1]
Renatha B. dos Santos[2]
Antonio André Novotny[3]
Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, Petrópolis, RJ
Jan Sokolowski[4]
Université de Lorraine, Nancy, France

Resumo. A derivada topológica é definida através da passagem do limite quando o parâmetro que governa o tamanho da perturbação tende a zero. Então, ela pode ser usada como uma direção de descida em um processo de otimização como em quaquer método baseado no gradiente do funcional custo. Neste trabalho, lida-se com a análise assintótica topológica no contexto de problemas de contato com atrito dado. Uma vez que o problema é não linear, a técnica de decomposição de domínio em conjunto com o operador pseudo-diferencial Steklov-Poincaré são utilizados para fins de análise assintótica com respeito ao parâmetro relacionado com o tamanho da perturbação topológica. Finalmente, o resultado da derivada topológica obtido é aplicado no contexto de otimização de estruturas submetidas a condição de contato com atrito dado.

Palavras-chave. Análise Assintótica, Derivada Topológica, Técnica de Decomposição de Domínio, Operador Steklov-Poincaré, Problema de Contato.

1 Introdução

A derivada topológica foi introduzida por [4] e desde então tem sido objeto de aplicações em diversos problemas, tais como: otimização topológica, problemas inversos, dano e propagação de trincas [2]. A derivada topológica é definida através da passagem do limite quando o parâmetro que governa o tamanho da perturbação tende a zero. Desta forma, ela pode ser usada como uma direção de descida em um processo de otimização como em quaquer método baseado no gradiente do funcional custo. A fim de apresentar a definição de derivada topológica, considere um domínio geométrico $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, o qual é submetido a uma perturbação caracterizada por uma inclusão circular B_ε de raio $\varepsilon > 0$ e centrada em um ponto arbitrário $\widehat{x} \in \Omega$. Assumindo que um dado funcional de forma $J_\varepsilon(\Omega)$ admite a seguinte expansão assintótica

$$J_\varepsilon(\Omega) = J(\Omega) + f(\varepsilon) D_T J(\widehat{x}) + o(f(\varepsilon)), \tag{1}$$

[1]cinthia@lncc.br
[2]renatha@lncc.br
[3]novotny@lncc.br
[4]jan.Sokolowski@univ-lorraine.fr

 © 2017 SBMAC

onde $f(\varepsilon)$ é uma função positiva decrescente tal que $f(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, $D_T J(\widehat{x})$ é a derivada topológica do funcional J avaliada em $\widehat{x}$. De acordo com a definição clássica de derivada topológica [4], segue de (1) que

$$D_T J(\widehat{x}) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J_\varepsilon(\Omega) - J(\Omega)}{f(\varepsilon)}. \tag{2}$$

Neste trabalho, a técnica de decomposição de domínio em conjunto com o operador pseudo-diferencial Steklov-Poincaré são utilizados para fins de análise assintótica, com respeito ao parâmetro ε, no contexto de problemas de contato com atrito dado. Como resultado fundamental, a expansão da energia de deformação coincide com a expansão do operador Steklov-Poincaré na fronteira do domínio truncado, o que conduz à derivada topológica associada. Finalmente, o resultado obtido é aplicado no contexto de otimização de estruturas submetidas a condição de contato com atrito dado.

2 Formulação do problema

Considere um domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira Lipschitz Γ que consiste em três partes mutuamente disjuntas, a saber $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C$. Desta forma, os deslocamentos são prescritos sobre Γ_D enquanto as trações são prescritas sobre Γ_N. Denomina-se Γ_C à parte da superfície onde o contato pode acontecer, isto é, para todo o processo de deformação a região de contato efetiva encontra-se sempre dentro de Γ_C. Assume-se ainda que as superfícies em possível contato são suficientemente planas e que as normais de ambas as superfícies são praticamente colineares, permitindo confundi-las em uma única normal n. Por fim, os espaços funcionais utilizados neste trabalho são os espaços usuais de Sobolev, para mais detalhes consultar [1]. Desta forma, o problema de minimização consiste em encontrar a função $u \in \mathcal{K}$ que minimiza o seguinte funcional

$$\mathcal{J}(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma(v) \cdot \nabla^s v - \int_{\Gamma_N} q \cdot v + \int_{\Gamma_C} |v \cdot \tau| \quad \forall v \in \mathcal{K}, \tag{3}$$

onde $\mathcal{K}$ é definido como

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : v = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \text{ e } \ v \cdot n \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C\}. \tag{4}$$

Em particular, o mínimo $u \in \mathcal{K}$ é solução da seguinte inequação variacional:

$$\int_\Omega \sigma(u) \cdot \nabla^s (v - u) - \int_{\Gamma_N} q \cdot (v - u) + \mu \int_{\Gamma_C} (|v \cdot \tau| - |u \cdot \tau|) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}. \tag{5}$$

A formulação forte associada ao problema de equilíbrio (5) lê-se [3]: Encontrar $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tal que,

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(\sigma(u)) & = & 0 & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \sigma(u)n & = & q & \text{sobre } \Gamma_N, \\ u\cdot n & \leq & 0 & \\ \sigma^{nn}(u) & \leq & 0 & \\ \sigma^{nn}(u)(u\cdot n) & = & 0 & \text{sobre } \Gamma_C. \\ \sigma^{n\tau}(u)(u\cdot\tau)+\mu|u\cdot\tau| & = & 0 & \\ -\mu\leq\quad \sigma^{n\tau}(u) & \leq & \mu & \end{array}\right. \tag{6}$$

No problema acima, o tensor tensão de Cauchy $\sigma(u)$ e o tensor deformação de Green linearizado $\nabla^s u$ são definidos como

$$\sigma(u)=\rho\mathbb{C}\nabla^s u,\quad \nabla^s u:=(\nabla u)^s=\frac{1}{2}(\nabla u+(\nabla u)^\top); \tag{7}$$

sendo $\mathbb{C}=\mathbb{C}^\top=2\mu\mathbb{I}+\lambda(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})$ o tensor constitutivo de quarta ordem em que $\mathbb{I}$ e I denotam os tensores identidade de quarta e segunda ordens, respectivamente, μ e λ representam os coeficientes de Lamé, ambos considerados constantes. Além disso, $\sigma^{nn}(u):=\sigma(u)n\cdot n$ é a componente normal de $\sigma(u)$ enquanto $\sigma^{n\tau}(u):=\sigma(u)n\cdot\tau$ é a componente de cisalhamento de $\sigma(u)$ no plano tangencial. Finalmente, a função constante por partes ρ é tal que: $\rho=1$ se $x\in\Omega$ e $\rho=\rho_0$ caso contrário, sendo $0<\rho_0\ll 1$ usado para representar os vazios. A fim de realizar a expansão assintótica e calcular a derivada topológica associada ao funcional (3), aplica-se a seguir a técnica de decomposição de domínio e introduz-se o operador pseudodiferenciável Steklov-Poincaré.

3 Decomposição de domínio

Considere que Ω é decomposto em duas partes $\Omega=\Omega_R\cup\overline{B_R}$ onde $\Omega_R:=\Omega\setminus\overline{B_R}$ e B_R, com fronteira Γ_R, denota a bola de raio $R>0$ centrada em um ponto arbitrário $\widehat{x}\in\Omega$. Considere ainda o seguinte problema de elasticidade linear em B_R: Dado $\psi\in H^{1/2}(\Gamma_R;\mathbb{R}^2)$, encontre o deslocamento $w:\ B_R\mapsto\mathbb{R}^2$, tal que

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(\sigma(w)) & = & 0 & \text{em } B_R, \\ \sigma(w) & = & \rho\mathbb{C}\nabla^s w, & \\ w & = & \psi & \text{sobre } \Gamma_R. \end{array}\right. \tag{8}$$

Utilizando (8), pode-se definir o operador Steklov-Poincaré:

$$\mathcal{A}:\ \psi\in H^{1/2}(\Gamma_R;\mathbb{R}^2)\mapsto\sigma(w)\eta\in H^{-1/2}(\Gamma_R;\mathbb{R}^2) \tag{9}$$

onde η é a normal exterior à fronteira Γ_R. Observe que, definindo $\psi=u|_{\Gamma_R}$, tem-se $w=u|_{B_R}$. Além disso, pela definição do operador $\mathcal{A}$, a solução w de (8) satisfaz:

$$\int_{B_R}\sigma(w)\cdot\nabla^s w=\int_{\Gamma_R}\mathcal{A}(\psi)\cdot\psi. \tag{10}$$

 © 2017 SBMAC

Isto é, a energia dentro de B_R é igual a energia associada ao operador Steklov-Poincaré. Levando-se em conta a decomposição de domínio e o operador Steklov-Poincaré, pode-se definir o seguinte funcional associado ao domínio truncado Ω_R:

$$\mathcal{J}^R(v) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_R} \sigma(v)\cdot\nabla^s v - \int_{\Gamma_N} q\cdot v + \int_{\Gamma_C} |v\cdot\tau| + \frac{1}{2}\int_{B_R} \sigma(v)\cdot\nabla^s v \tag{11}$$

com $v \in \mathcal{K}^R := \mathcal{K}(\Omega_R)$. Então, o mínimo $u^R \in \mathcal{K}^R$ é dado pela solução da inequação variacional:

$$\int_{\Omega_R} \sigma(u^R)\cdot\nabla^s(v-u^R) - \int_{\Gamma_N} q\cdot(v-u^R) + \int_{\Gamma_C} |v\cdot\tau| - |u^R\cdot\tau| + \int_{\Gamma_R} \mathcal{A}(u^R)\cdot(v-u^R) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}^R. \tag{12}$$

Observe que $u^R = u|_{\Omega_R}$ e portanto tem-se

$$\mathcal{J}^R(u^R) = \mathcal{J}(u). \tag{13}$$

4 Análise de sensibilidade topológica

Com o intuito de obter a expansão assintótica para o funcional de forma (13), considere que uma bola B_ε é introduzida em um ponto arbitrário $\widehat{x} \in \Omega$, longe o suficiente da região de contato Γ_C. Então, o problema perturbado consiste em: Encontrar $u_\varepsilon \in \mathcal{K}$ que minimiza o funcional

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v) := \frac{1}{2}\int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(v)\cdot\nabla^s v - \int_{\Gamma_N} q\cdot v + \int_{\Gamma_C} |v\cdot\tau|, \tag{14}$$

com $v \in \mathcal{K}$. O elemento $u_\varepsilon \in \mathcal{K}$ é solução da seguinte inequação variacional

$$\int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)\cdot\nabla^s(v-u_\varepsilon) - \int_{\Gamma_N} q\cdot(v-u_\varepsilon) + \int_{\Gamma_C} |v\cdot\tau| - |u_\varepsilon\cdot\tau| \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}. \tag{15}$$

O sistema forte associado, lê-se:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)) & = & 0 & \text{em } \Omega, \\ \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) & = & \gamma_\varepsilon \rho \mathbb{C}\nabla^s u, & \\ u_\varepsilon & = & 0 & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)n & = & q & \text{sobre } \Gamma_N, \\ [\![u_\varepsilon]\!] & = & 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \\ [\![\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)]\!] & = & 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \\ \left.\begin{array}{rcl} u_\varepsilon\cdot n & \leq & 0 \\ \sigma_\varepsilon^{nn}(u_\varepsilon) & \leq & 0 \\ \sigma_\varepsilon^{nn}(u_\varepsilon)(u_\varepsilon\cdot n) & = & 0 \\ \sigma_\varepsilon^{n\tau}(u_\varepsilon)(u_\varepsilon\cdot\tau) + \mu|u_\varepsilon\cdot\tau| & = & 0 \\ -\mu \leq \quad \sigma_\varepsilon^{n\tau}(u_\varepsilon) & \leq & \mu \end{array}\right\} & & & \text{sobre } \Gamma_C, \end{array}\right. \tag{16}$$

onde $\gamma_\varepsilon = 1$ se $x \in \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$ e $\gamma_\varepsilon = \gamma$ se $x \in B_\varepsilon$, sendo $\gamma \in \mathbb{R}^+$ o contraste na propriedade material.

 © 2017 SBMAC

Agora, aplica-se a decomposição de domínio no domínio perturbado. Para tanto, considere uma bola B_R, com $R > \varepsilon > 0$ centrada em $\widehat{x} \in \Omega$ e $\Omega_R = \Omega \setminus \overline{B_R}$. Desta maneira, em B_R considera-se o seguinte problema de elasticidade linear: Dado $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_R; \mathbb{R}^2)$, encontre o deslocamento $w_\varepsilon : B_R \mapsto \mathbb{R}^2$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(\sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)) & = & 0 & \text{em } B_R, \\ \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) & = & \gamma_\varepsilon \rho \mathbb{C} \nabla^s w, & \\ w_\varepsilon & = & \psi & \text{sobre } \Gamma_R, \\ [\![w_\varepsilon]\!] & = & 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon, \\ [\![\sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)]\!] n & = & 0 & \text{sobre } \partial B_\varepsilon. \end{array} \right. \tag{17}$$

Utilizando (17), define-se o operador Steklov-Poincaré $\mathcal{A}_\varepsilon$ sobre Γ_R como

$$\mathcal{A}_\varepsilon : \ \psi \in H^{1/2}(\Gamma_R; \mathbb{R}^2) \mapsto \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon)\eta \in H^{-1/2}(\Gamma_R; \mathbb{R}^2). \tag{18}$$

Observa-se que, definindo $\psi = u_\varepsilon|_{\Gamma_R}$, $w_\varepsilon = u_\varepsilon|_{B_R}$. De fato, pela denição do operador $\mathcal{A}_\varepsilon$, a solução w_ε de (17) satisfaz:

$$\int_{B_R} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \nabla^s w_\varepsilon = \int_{\Gamma_R} \mathcal{A}_\varepsilon(\psi) \cdot \psi. \tag{19}$$

Ou seja, a energia em $B_R \supset B_\varepsilon$ é igual a energia associada ao operador Steklov-Poincaré sobre Γ_R. Além disso, para o problema de contato estudado neste trabalho, o funcional de forma no domínio truncado é dado por

$$\mathcal{J}_\varepsilon^R(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} \sigma(v) \cdot \nabla^s v - \int_{\Gamma_N} q \cdot v + \int_{\Gamma_C} |v \cdot \tau| + \frac{1}{2} \int_{B_R} \sigma_\varepsilon(v) \cdot \nabla^s v, \tag{20}$$

com $v \in \mathcal{K}^R$. Então, a única $u_\varepsilon^R \in \mathcal{K}^R$ é dada pela solução da inequação variacional:

$$\int_{\Omega_R} \sigma(u_\varepsilon^R) \cdot \nabla^s (v - u_\varepsilon^R) - \int_{\Gamma_N} q \cdot (v - u_\varepsilon^R) + \int_{\Gamma_C} |v \cdot \tau| - |u_\varepsilon^R \cdot \tau| + \int_{\Gamma_R} \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon^R) \cdot (v - u_\varepsilon^R) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}^R. \tag{21}$$

Note que, $u_\varepsilon^R = u_\varepsilon|_{\Omega_R}$ e portanto tem-se

$$\mathcal{J}_\varepsilon^R(u_\varepsilon^R) = \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon). \tag{22}$$

A seguir, são apresentados dois importantes resultados. O primeiro, garante a existência desta derivada topológica associada ao funcional custo tratado. O segundo prova a diferenciabilidade topológica do funcional em questão.

Proposição 4.1. *Sejam u^R e u_ε^R soluções de* (15) *e* (21)*, respectivamente, e assuma que*

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A} - \varepsilon^2 \mathcal{B} + \mathcal{R}_\varepsilon \tag{23}$$

na norma do operador $\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R); H^{-1/2}(\Gamma_R))$, sendo $\mathcal{B}$ um operador linear e

$$\|\mathcal{R}_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R); H^{-1/2}(\Gamma_R))} = o(\varepsilon^2). \tag{24}$$

Então, a seguinte estimativa é válida:

$$\|u_\varepsilon^R - u^R\|_{H^1(\Omega^R)} \leq C\varepsilon^2. \tag{25}$$

Demonstração. A prova deste resultado segue o mesmo raciocínio apresentado em [2]. □

Lema 4.1. *O funcional de energia perturbado no domínio truncado, a saber*

$$\mathcal{J}_\varepsilon^R(u_\varepsilon^R) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_R} \sigma(u_\varepsilon^R)\cdot\nabla^s u_\varepsilon^R - \int_{\Gamma_N} q\cdot u_\varepsilon^R + \int_{\Gamma_C} |u_\varepsilon^R\cdot\tau| + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_R} \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon^R)\cdot u_\varepsilon^R, \tag{26}$$

é diferenciável com respeito a $\varepsilon \to 0$ e admite a seguinte expansão:

$$\mathcal{J}_\varepsilon^R(u_\varepsilon^R) = \mathcal{J}^R(u^R) - \frac{\varepsilon^2}{2}\langle\mathcal{B}(u^R), u^R\rangle_{\Gamma_R} + o(\varepsilon^2), \tag{27}$$

onde $\langle\phi,\varphi\rangle_{\Gamma_R}$ denota o produto interno em Γ_R.

Demonstração. Levando-se em conta que $u_\varepsilon^R \in \mathcal{K}^R$ é o mínimo de (20) e $u^R \in \mathcal{K}^R$ é o mínimo de (11), as seguintes desigualdades são válidas:

$$\mathcal{J}_\varepsilon^R(u_\varepsilon^R) - \mathcal{J}^R(u_\varepsilon^R) \leq \mathcal{J}_\varepsilon^R(u_\varepsilon^R) - \mathcal{J}^R(u^R) \leq \mathcal{J}_\varepsilon^R(u^R) - \mathcal{J}^R(u^R). \tag{28}$$

Utilizando as definições de $\mathcal{J}_\varepsilon^R$ e $\mathcal{J}^R$, considerando a expansão (23) e organizando os temos, tem-se

$$\frac{\mathcal{J}_\varepsilon^R(u^R) - \mathcal{J}^R(u^R)}{\varepsilon^2} = -\frac{1}{2}\langle\mathcal{B}(u^R), u^R\rangle_{\Gamma_R} + \langle\mathcal{R}_\varepsilon(u^R), u^R\rangle_{\Gamma_R}. \tag{29}$$

Segue disto que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\mathcal{J}\varepsilon^R(u^R) - \mathcal{J}^R(u^R)}{\varepsilon^2}\right) = -\frac{1}{2}\langle\mathcal{B}(u^R), u^R\rangle_{\Gamma_R}. \tag{30}$$

Similarmente, escreve-se

$$\frac{\mathcal{J}_\varepsilon^R(u_\varepsilon^R) - \mathcal{J}^R(u_\varepsilon^R)}{\varepsilon^2} = -\frac{1}{2}\langle\mathcal{B}(u_\varepsilon^R), u_\varepsilon^R\rangle_{\Gamma_R} + \langle\mathcal{R}_\varepsilon(u_\varepsilon^R), u_\varepsilon^R\rangle_{\Gamma_R}. \tag{31}$$

Levando-se em conta a Proposição 4.1, obtém-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\mathcal{J}_\varepsilon^R(u_\varepsilon^R) - \mathcal{J}^R(u_\varepsilon^R)}{\varepsilon^2}\right) = -\frac{1}{2}\langle\mathcal{B}(u^R), u^R\rangle_{\Gamma_R}. \tag{32}$$

Considerando os limites mostrados acima e (28) concluí-se que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\mathcal{J}_\varepsilon^R(u_\varepsilon^R) - \mathcal{J}^R(u^R)}{\varepsilon^2}\right) = -\frac{1}{2}\langle\mathcal{B}(u^R), u^R\rangle_{\Gamma_R}. \tag{33}$$

Portanto, pode-se escrever (27). □

Utilizando o Lema 4.1, tem-se

$$\mathcal{J}_\varepsilon^R(u_\varepsilon^R) - \mathcal{J}^R(u^R) = -\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{\Gamma_R} \mathcal{B}(u^R)\cdot u^R + o(\varepsilon^2). \tag{34}$$

Além disso, o seguinte Teorema é válido.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0186 © 2017 SBMAC

Teorema 4.1. *A energia em B_R adimite a expansão assintótica:*

$$\int_{B_R} \sigma_\varepsilon(w_\varepsilon) \cdot \nabla^s(w_\varepsilon) = \int_{B_R} \sigma(w) \cdot \nabla^s(w) - 2\varepsilon^2 \mathbb{P}\sigma(w) \cdot \nabla^s w + o(\varepsilon^2), \tag{35}$$

em que o tensor de polarização $\mathbb{P}$ é dado pelo seguinte tensor isotrópico de quarta ordem

$$\mathbb{P} = \frac{\pi}{2} \frac{1-\gamma}{1+\gamma a_2} \left((1+a_2)\mathbb{I} + \frac{1}{2}(a_1 - a_2) \frac{1-\gamma}{1+\gamma a_1} \mathrm{I} \otimes \mathrm{I} \right), \tag{36}$$

e as constantes $a_1 = (\lambda + \mu)/\mu$ e $a_2 = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$. E ainda, o contraste γ é definido como: $\gamma = \rho_0$ se $x \in B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}$ e $\gamma = 1/\rho_0$ se $x \in B_\varepsilon$.

Demonstração. O leitor interessado na prova deste resultado pode consultar [2]. □

Portanto, de (10), (19) e considerando o Teorema 4.1, tem-se

$$\int_{\Gamma_R} \mathcal{B}(u^R) \cdot u^R = \mathbb{P}\sigma(u) \cdot \nabla^s u \tag{37}$$

onde definiu-se $\psi = u|_{\Gamma_R}$ em (8). Assim, pelas igualdades (13) e (22) conclui-se que

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u) = \varepsilon^2 \mathbb{P}\sigma(u) \cdot \nabla^s u + o(\varepsilon^2). \tag{38}$$

Tendo em vista a expansão assintótica (1), considerando $f(\varepsilon) = \varepsilon^2$, finalmente, tem-se que a derivada topológica satisfaz a identidade

$$D_T \mathcal{J}(u) = \mathbb{P}\sigma(u) \cdot \nabla^s u. \tag{39}$$

5 Conclusão

Neste trabalho, foi feita a análise assintótica para o problema de contato com atrito dado utilizando a técnica de decomposição de domínio e o operador Steklov-Poincaré. Como um resultado fundamental, a expansão da energia de deformação coincide com a expansão do operador Steklov-Poincaré na fronteira do domínio truncado, o que conduziu à derivada topológica associada.

Referências

[1] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitex. Springer, New York, 2010.

[2] A. A. Novotny and J. Sokołowski. *Topological derivatives in shape optimization.* Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

[3] J. Sokołowski. Sensitivity analysis of contact problems with prescribed friction. *Applied Mathematics and Optimization*, 18(2):99–117, 1988.

[4] J. Sokołowski and A. Żochowski. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(4):1251–1272, 1999.

 © 2017 SBMAC