Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Análise de Sensibilidade Topológica no Processo de Fraturamento Hidráulico Tridimensional

Marcel D. da S. Xavier[1]
Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, Petrópolis, RJ
Antonio André Novotny[2]
Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, Petrópolis, RJ

Resumo. A análise de sensibilidade topológica fornece uma função escalar, chamada derivada topológica, que mede a sensibilidade de um dado funcional de forma em relação a uma perturbação singular infinitesimal no domínio, tal como a inserção de furos, inclusões, termos fonte ou até mesmo trincas. Este conceito tem se mostrado extremamente relevante no tratamento de uma ampla gama de problemas da física e da engenharia. Neste trabalho, é apresentada a derivada topológica no contexto de fraturamento hidráulico tridimensional. Inicialmente, será introduzido um modelo de evolução de dano submetido a pressão hidrostática. Tal modelo é obtido, basicamente, incorporando o conceito de dano pressurizado ao modelo de Francfort-Marigo. Na sequência, é apresentada, de fato, a derivada topológica associada ao novo modelo. Este resultado é o termo principal da expansão assintótica topológica da energia potencial total associada a um problema de elasticidade linear tridimensional considerando como perturbação topológica a nucleação de uma inclusão esférica com condição de transmissão não homogênea. Objetiva-se, futuramente, a partir dos resultados aqui obtidos, construir um algoritmo de nucleação e propagação de dano submetido à pressão hidrostática em três dimensões.

Palavras-chave. Fraturamento Hidráulico Tridimensional, Análise de Sensibilidade Topológica, Derivada Topológica.

1 Introdução

Neste trabalho o conceito de derivada topológica é aplicado no contexto de fraturamento hidráulico tridimensional. Inicialmente, propõe-se uma extensão do modelo de dano de Francfort-Marigo, [1], na qual leva-se em conta que a região danificada está sujeita a ação de pressão hidrostática. Associada a este novo modelo, é então, apresentada a derivada topológica sendo esta o principal termo da expansão assintótica topológica da energia potencial total associada a um problema de elasticidade linear tridimensional considerando como perturbação topológica a nucleação de uma inclusão esférica com condição de transmissão não homogênea. Fisicamente, há pressão hidrostática atuando sobre a interface da perturbação topológica. Sendo assim, objetiva-se, futuramente, desenvolver um algoritmo

---

[1]marcel@lncc.br
[2]novotny@lncc.br

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

de nucleação e propagação de dano submetido à pressão hidrostática, simulando assim o processo de fraturamento hidráulico tridimensional. Nota-se, no entanto, que no contexto da mecânica do dano e da fratura a utilização da derivada topológica em conjunto com o modelo de dano de Francfort-Marigo é conhecida na literatura, ver por exemplo [2, 3]. Contudo, até o presente trabalho, não é levada em conta a ação de pressão hidrostática atuando sobre a interface da região danificada. Dessa forma, a introdução de um modelo de evolução de dano submetido a pressão hidrostática é nova e representa a primeira contribuição importante deste trabalho. Por outro lado, no contexto de elasticidade linear tridimensional, a derivada topológica é conhecida na literatura quando obtida com respeito a nucleação de furos com condições homogêneas, ver por exemplo [4]. Também é conhecida no contexto de elasticidade anisotrópica com condição de transmissão homogênea sobre a interface da perturbação topológica, ver [5]. A derivada topológica com respeito a nucleação de inclusões com condições de transmissão não homogênea foi rigorosamente desenvolvida em [6], porém, somente para o caso bidimensional. Portanto, não há resultados com respeito a nucleação de inclusões com condições de transmissão não homogênea no contexto tridimensional. Sendo assim, a derivada topológica aqui apresentada representa a segunda e mais importante contribuição deste trabalho.

2 Fraturamento Hidráulico

Fraturamento hidráulico estuda a evolução de regiões previamente danificadas em corpos elásticos quando estas estão submetidas a injeção de fluido sob alta pressão.

2.1 Modelo de Dano de Francfor-Marigo

O modelo de dano proposto por Francfort-Marigo em 1993, [1], é utilizado para descrever a evolução quase-estática de corpos linearmente elásticos com uma trinca em propagação. De acordo com o modelo, tal comportamento é obtido minimizando um funcional que é a soma da energia potencial total do sistema com uma medida de dissipassão energética. O modelo apresenta algumas limitações devido a sua natureza puramente energética, todavia, converge, no sentido da gama convergência, para o modelo de fratura de Griffth, [7], amplamente utilizado na modelagem de fratura frágil.

Considere um corpo elástico deformável representado por um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, com fronteira $\partial\Omega$ suave e que contém em seu interior uma região ω previamente danificada. O modelo de Francfort-Marigo propõe que puntualmente deve existir uma mudança abrupta de comportamento caso alguma condição associada ao material ocorra. Assim, a proposta deste modelo de dano consiste em, inicialmente, introduzir um par de materiais: um representando a região sadia, isto é, $\Omega\backslash\overline{\omega}$, e o outro a região danificada ω. Com esta finalidade introduz-se um parâmetro ρ definido da seguinte forma:

$$\rho = \rho(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega\backslash\overline{\omega}, \\ \rho_0 & \text{se } x \in \omega, \quad \text{com} \quad 0 < \rho_0 \ll 1. \end{cases} \tag{1}$$

A partir daí, a mudança do material sadio para o material danificado ocorre somente se a liberação da energia associada a esta transição superar um determinado valor carac-

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0187

terístico associado ao material. Em outras palavras, o dano ocorre se:

$$\epsilon > \epsilon_b, \tag{2}$$

onde ϵ é a energia específica de deformação e ϵ_b é uma constante positiva que representa a densidade de liberação de energia associada a perda de rigidez (início do dano).

Por fim, o modelo propõe um funcional, $\mathcal{J}_\omega(u)$, denominado funcional de dissipação de energia de Francfort-Marigo, a ser minimizado, definido da seguinte forma:

$$\mathcal{J}_\omega(u) = \mathcal{E}(u) + \epsilon_b \left|\omega\right|, \tag{3}$$

onde a primeira parcela representa a energia potencial total do sistema e a segunda uma medida de dissipação energética, como mencionado.

2.2 Dano Pressurizado

No contexto de fraturamento hidráulico, a região danificada ω encontra-se pressurizada (dano pressurizado), ou seja, sujeita a ação de pressão hidrostática. Também é levado em conta um aumento gradativo desta pressão no interior da região danificada. A pressão, neste caso, é representada da seguinte forma:

$$p = p_0 + \delta p, \tag{4}$$

onde p_0 representa a pressão inicial e δp o incremento. Cabe destacar que tal incremento implica em uma pequena variação no campo de deslocamentos.

O modelo de evolução de dano submetido a pressão hidrostática é então obtido a partir da introdução da noção de dano pressurizado no modelo de Francfort-Marigo. Sendo assim, o novo modelo propõe o seguinte funcional a ser minimizado a cada incremento da pressão:

$$\mathcal{J}_\omega(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(u)\cdot\nabla^s u - \int_\omega p\,\mathrm{div} u + \epsilon_b \int_\omega 1, \tag{5}$$

onde ϵ_b é o parâmetro mencionado em (2). Como o processo é quase-estático, segue que a função vetorial u é solução do seguinte problema variacional: Encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$\int_\Omega \sigma(u)\cdot\nabla^s \eta = \int_\omega p\,\mathrm{div}\eta,\ \forall \eta \in \mathcal{V}, \tag{6}$$

com $\sigma(u) = \rho\mathbb{C}\nabla^s u$, onde ρ é dado por (1), $\mathbb{C} = \frac{E}{1+\nu}\left(\mathbb{I} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}\right)$ é o tensor constitutivo, onde I e $\mathbb{I}$ são tensores identidade de segunda e quarta ordens, respectivamente, E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson, ambos constantes em todo o domínio. O conjunto $\mathcal{U}$ e o espaço $\mathcal{V}$ são definidos por:

$$\mathcal{U} := \left\{\varphi \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) : [\![\varphi]\!]_{|\partial\omega} = 0,\ \varphi_{|\Gamma_D} = \overline{u}\right\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{V} := \left\{\varphi \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) : [\![\varphi]\!]_{|\partial\omega} = 0,\ \varphi_{|\Gamma_D} = 0\right\}. \tag{8}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0187

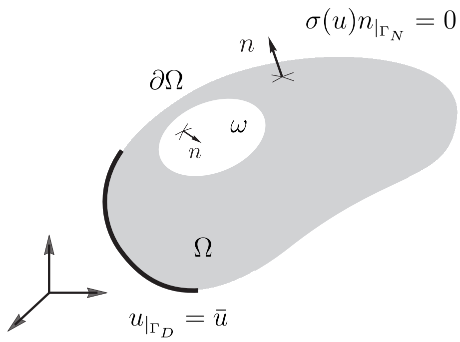

Figura 1: Dano pressurizado imerso em um corpo elástico deformável.

O operador $[\![\varphi]\!]$ é usado para denotar o salto da função φ sobre o contorno da região danificada pressurizada ω, isto é, $[\![\varphi]\!] = \varphi_{|\Omega\setminus\overline{\omega}} - \varphi_{|\omega}$ sobre $\partial\omega$. Além disso, $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$ com $\overline{\Gamma}_D \cap \overline{\Gamma}_N = \emptyset$, onde Γ_D e Γ_N são contornos de Dirichlet e Neumann respectivamente, ver Figura 1.

A formulação forte associada ao problema variacional (6) é dada por: Encontrar u tal que

$$\left\{\begin{array}{rcllr} \operatorname{div}\sigma(u) & = & 0 & \text{em} & \Omega, \\ \sigma(u) & = & \rho\mathbb{C}\nabla^s u, & & \\ u & = & \overline{u} & \text{sobre} & \Gamma_D, \\ \sigma(u)n & = & 0, & \text{sobre} & \Gamma_N, \\ [\![u]\!] & = & 0 & \multirow{2}{*}{\text{sobre}} & \multirow{2}{*}{$\partial\omega$.} \\ [\![\sigma(u)]\!]\, n & = & -pn & & \end{array}\right. \tag{9}$$

A condição de transmissão sobre $\partial\omega$ surge naturalmente da formulação variacional (6).

Em (5), as duas primeiras parcelas representam a energia potencial total do sistema e a última trata-se da medida de dissipação de energia. Note que a condição associada ao material para que a região danificada pressurizada se propague é dada por:

$$\frac{1}{2}\sigma(u) \cdot \nabla^s u > \epsilon_b. \tag{10}$$

2.3 Formulação do Problema de Minimização

Uma vez introduzido o modelo de evolução de dano submetido a pressão hidrostática, objetiva-se minimizar o funcional proposto com relação ao conjunto $\omega \subset \Omega$. Sendo assim, o seguinte problema de minimização é definido:

$$\underset{\omega\subset\Omega}{\text{Minimize}}\, \mathcal{J}_\omega(u) \tag{11}$$

onde $\mathcal{J}_\omega(u)$ é dado por (5) e u é solução de (6).

Uma forma bastante natural de atacar esta classe de problemas é utilizando a análise de sensibilidade topológica. Esta abordagem fornece a expansão assintótica topológica

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0187

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

do referido funcional. O termo principal desta expansão é uma função escalar chamada derivada topológica que mede a sensibilidade do funcional quando o domínio de análise se encontra submetido à uma pertubação. Neste sentido, a derivada topológica é utilizada para indicar a direção de minimização do funcional proposto.

3 Análise de Sensibilidade Topológica

Para introduzir o conceito de derivada topológica considere um domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ o qual contém uma perturbação em uma pequena região $B_\varepsilon(\widehat{x})$ de tamanho ε centrada em um ponto arbitrário $\widehat{x} \in \Omega$, conforme pode ser observado na Figura 2. É introduzida então, uma função característica $x \mapsto \chi(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, associada ao domínio original, denotado por $\chi = \mathbf{1}_\Omega$, tal que:

$$|\Omega| = \int_{\mathbb{R}^3} \chi, \tag{12}$$

onde $|\Omega|$ é a medida de Lebesgue de Ω. Então, é definida uma função característica da forma $x \mapsto \chi_\varepsilon(\widehat{x}; x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, associada ao domínio topologicamente perturbado. No caso de uma perfuração, por exemplo, $\chi_\varepsilon(\widehat{x}) = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_{B_\varepsilon(\widehat{x})}$ e o domínio perturbado é obtido como $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{B_\varepsilon}$. Então, é assumido que um dado funcional $\psi(\chi_\varepsilon(\widehat{x}))$, associado ao domínio topologicamente perturbado, admite a seguinte expansão assintótica topológica:

$$\psi(\chi_\varepsilon(\widehat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)\mathcal{T}(\widehat{x}) + o(f(\varepsilon)), \tag{13}$$

onde $\psi(\chi)$ é o funcional associado ao domínio original, isto é, sem perturbação, e $f(\varepsilon)$ é uma função positiva tal que $f(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. A função $\widehat{x} \mapsto \mathcal{T}(\widehat{x})$ é chamada Derivada Topológica de ψ em $\widehat{x}$. Portanto, esta derivada pode ser vista, inicialmente, como um fator de correção de primeira ordem de $\psi(\chi_\varepsilon(\widehat{x}))$. Reorganizando (13) e tomando o limite com $\varepsilon \to 0$ obtém-se a definição geral da derivada topológica:

$$\mathcal{T}(\widehat{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\psi(\chi_\varepsilon(\widehat{x})) - \psi(\chi(x))}{f(\varepsilon)}. \tag{14}$$

Neste trabalho, a perturbação topológica trata-se de uma inclusão com condição de trans-

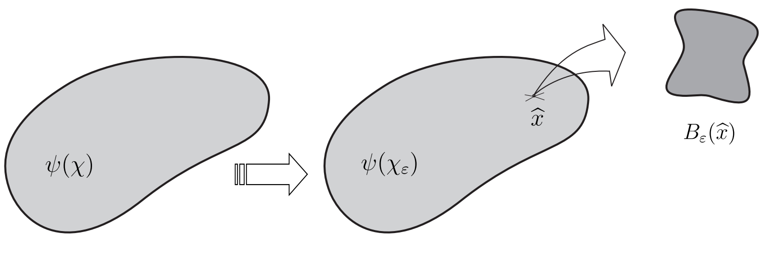

Figura 2: O conceito de Derivada Topológica.

missão não homogênea, ver [6]. O domínio perturbado é obtido, inicialmente, pela nucleação de uma pequena esfera, denotada por $B_\varepsilon(\widehat{x})$, introduzida no interior de $\Omega \backslash \overline{\omega} \subset \mathbb{R}^3$.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0187

Aqui, $B_\varepsilon(\widehat{x})$, com $\overline{B_\varepsilon} \subset \Omega \backslash \overline{\omega}$, é usado para denotar uma bola de raio ε centrada em $\widehat{x} \in \Omega \setminus \overline{\omega}$. Em seguida, esta região é preenchida por uma inclusão com propriedade material diferente do meio. Neste caso, a função característica associada ao domínio perturbado é dada por $\chi_\varepsilon(\widehat{x}) = \mathbf{1}_\Omega - (1-\gamma)\mathbf{1}_{B_\varepsilon(\widehat{x})}$ onde γ é um valor positivo que representa o contraste na propriedade material.

3.1 Fórmula Fechada da Derivada Topológica

A derivada topológica para o funcional proposto pelo modelo de evolução de dano submetido a pressão hidrostática, é dada por:

$$\mathcal{T}(\widehat{x}) = -\mathbb{P}_\gamma \sigma(u(\widehat{x})) \cdot \nabla^s u(\widehat{x}) - \frac{1}{2}\left[\alpha\left(3\frac{1-\nu}{1+\nu} + (1-\gamma)\right) + 1\right] p \, \mathrm{div} u(\widehat{x}) - \frac{3\alpha p^2(1-2\nu)}{2\rho \mathrm{E}} + \epsilon_b, \quad (15)$$

onde $\mathbb{P}_\gamma$, denominado tensor de polarização, é dado por:

$$\mathbb{P}_\gamma = \frac{1-\gamma}{2}\left[\beta \mathbb{I} + \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\alpha - \frac{1}{3}\beta\right)\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}\right], \quad (16)$$

onde as constantes α e β são, respectivamente, dadas por:

$$\alpha = \frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)+(1+\nu)(\gamma-1)} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{15(1-\nu)}{15(1-\nu)+2(4-5\nu)(\gamma-1)}. \quad (17)$$

O tensor de polarização mostrado em (16) foi construído a partir do tensor obtido em [5]. Aqui, o tensor de polarização é isotrópico, pois foi escolhida uma inclusão esférica. Formalmente, pode-se tomar os casos limites $\gamma \to 0$ e $\gamma \to \infty$. Para $\gamma \to 0$, a inclusão é equivalente a um furo e a condição de transmissão na fronteira da inclusão degenera para uma condição de contorno de Neumann não homogênea. Neste caso o tensor de polarização é dado por:

$$\mathbb{P}_0 = \frac{3}{4}\frac{(1-\nu)}{(7-5\nu)}\left(10\mathbb{I} - \frac{(1-5\nu)}{(1-2\nu)}\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}\right). \quad (18)$$

O resultado acima corrobora com o tensor de polarização encontrado em [4] obtido no contexto em que a perturbação topológica trata-se de uma perfuração. Para $\gamma \to \infty$ a inclusão elástica passa a representar uma inclusão rígida e neste caso tem-se:

$$\mathbb{P}_\infty = -\frac{3}{4}\frac{(1-\nu)}{(4-5\nu)}\left(5\mathbb{I} + \frac{(1-5\nu)}{(1+\nu)}\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}\right). \quad (19)$$

4 Conclusões

No presente trabalho foi, inicialmente, apresentado um modelo de evolução de dano submetido a pressão hidrostática. O novo modelo é obtido introduzindo o conceito de dano pressurizado ao modelo de Francfort-Marigo. Tal abordagem não é observada na literatura e representa, portanto, a primeira contribuição importante deste trabalho. Em seguida, foi proposto um problema de minimização do funcional de dissipação energética introduzido pelo novo modelo. Na sequência, foi apresentada a derivada topológica associada ao modelo de evolução de dano submetido a pressão hidrostática em três dimensões. Em particular, apresentou-se o principal resultado da análise de sensibilidade topológica da energia potencial total associada a um problema de elasticidade linear tridimensional considerando como perturbação topológica a nucleação de uma inclusão esférica com condição de transmissão não homogênea. Cabe destacar que no contexto tridimensional a derivada topológica não é observada na literatura quando obtida com respeito a nucleação de uma inclusão com condição de transmissão não homogênea. Sendo assim, o resultado aqui apresentado é novo e representa a segunda e mais importante contribuição deste trabalho. O próximo passo agora, consiste em desenvolver um algoritmo de nucleação e propagação de dano submetido a pressão hidrostática em três dimensões com o objetivo de aplicar os resultados teóricos aqui desenvolvidos.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio das seguinte agências de fomento para o desenvolvimento deste trabalho: PRH/ANP-50 (Agência Nacional do Petróleo) e FAPERJ (Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro).

Referências

[1] G. A. Francfort and J. J. Marigo. Stable damage evolution in a brittle continuous medium. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 12:149–189, 1993.

[2] G. Allaire, F. Jouve, and N. Van Goethem. Damage and fracture evolution in brittle materials by shape optimization methods. *Journal of Computational Physics*, 230(12):5010–5044, 2011.

[3] J.M.C. Farias. *Análise de sensibilidade topológica aplicada ao modelo de dano de Francfort-Marigo.* M.Sc. Dissertation, EMC/UFSC, Florianópolis, Brasil, 2013.

[4] A. A. Novotny and J. Sokołowski. *Topological derivatives in shape optimization.* Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

[5] M. Bonnet and G. Delgado. The topological derivative in anisotropic elasticity. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 66(4):557–586, 2013.

[6] M.D.S. Xavier. *Derivada topológica na otimização de estruturas submetidas a pressão hidrostática.* M.Sc. Dissertation, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Brazil, 2014.

[7] A. A. Griffiths. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosofical Transaction of the Royal Society*, 221:163–198, 1921.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0187