

APROXIMAÇÕES CONSISTENTES PARA PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO IMPULSIVO

DANIELLA PORTO*, GERALDO NUNES SILVA*, HELOÍSA HELENA MARINO SILVA*

**Depto. de Matemática Aplicada,
IBILCE, UNESP, 15054-000,
São José do Rio Preto, SP, Brasil*

Emails: danielinha.dani@gmail.com, gsilva@ibilce.unesp.br, hsilva@ibilce.unesp.br

Resumo— Neste trabalho iremos introduzir o conceito de aproximações consistentes e utilizá-lo em dois tipos de problemas. O Primeiro é um problema de controle ótimo que foi estudado por outro autor, e o segundo é de controle impulsivo e foi estudado por nós.

Keywords— Controle Impulsivo, Aproximações Consistentes, discretização de Euler.

1 Introdução

A teoria de aproximação consistente é muito importante pois através dela é possível obter problemas que se aproximam de alguma forma do problema original, no caso será através dos epígrafos, e a partir daí mostra-se que se existirem soluções para estes novos problemas e estas possuírem um ponto de acumulação, este tal ponto será solução para o problema original. E, para encontrar esta sequência de soluções podemos utilizar todos os métodos numéricos conhecidos, já que estes problemas aproximados surgem através da discretização de Euler.

Primeiramente, veremos os conceitos básicos que são necessários para o bom entendimento do processo citado no parágrafo anterior. Logo após, faremos a aproximação para um problema de controle ótimo. A teoria e este problema com toda sua resolução podem ser encontrados no livro Polak (1997) e no artigo Pironneau and Polak (2002). Em seguida introduzimos o problema de controle ótimo impulsivo e o que já foi feito neste sentido para o mesmo. Por fim concluímos e damos as referências utilizadas no trabalho.

É importante mencionar que existe uma grande quantidade de trabalhos que versam sobre problemas de controle ótimo impulsivos em que os sistemas de controle envolvem medidas, por exemplo Arutyunov et al. (2010), Arutyunov et al. (2011), Silva and Vinter (1997), mas poucos envolvem métodos numéricos. Existem resultados sobre aproximação discreta por Euler para sistemas de controle impulsivo, mas sem a otimização Wolenski and Žabić (2007). É com o intuito de enriquecer a literatura que estamos realizando este trabalho.

2 Conceitos Básicos

Seja B um espaço normado com norma $\|\cdot\|_B$. Iremos considerar o problema

$$(P) \quad \min_{x \in X} f(x), \quad (1)$$

onde $f : B \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é semicontínua inferior e $X \subset B$.

Sejam \mathcal{N} subconjunto infinito de \mathbb{N} e $\{B_N\}_{N \in \mathcal{N}}$ uma família de subespaços de dimensão finita de B tal que $B_{N_1} \subset B_{N_2}$ se $N_1 < N_2$ e $\cup B_N$ é densa em B . Para todo $N \in \mathcal{N}$, seja $f_N : B_N \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função semicontínua inferior que aproxima de $f(\cdot)$ sobre B_N , e seja $X_N \subset B_N$ uma aproximação para X . Considere a família de problemas aproximados

$$(P_N) \quad \min_{x \in X_N} f_N(x), \quad N \in \mathcal{N}. \quad (2)$$

Observação 1 A relação entre o problema (P) e os problemas (P_N) fica clara se trabalharmos com o epígrafo.

Definição 1 Os epígrafos dos problemas (P) e (P_N) são dados, respectivamente, por

$$E := \{(x_0, x); x \in X, x_0 \geq f(x)\},$$

e,

$$E_N := \{(x_0, x); x \in X_N, x_0 \geq f_N(x)\}.$$

Feito isto, os problemas (P_N) e (P) podem ser reescritos da seguinte forma

$$(P) \quad \min_{(x_0, x) \in E} x_0,$$

e,

$$(P_N) \quad \min_{(x_0, x) \in E_N} x_0.$$

Feita esta observação, podemos definir o que vem a ser aproximações consistentes para o problema (P) .

Definição 2 Sejam B um espaço normado e $\{B_N\}_{N \in \mathcal{N}}$ uma sequência de subespaços de B de dimensão finita cuja $\cup B_N$ é densa em B . Considere o problema (1), onde X é um subconjunto de B e $f : B \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é semicontínua inferior, juntamente com o problema (2), com X_N subconjunto de B_N e $f : B_N \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ semicontínua inferior.

- Dizemos que P_N epi-converge para P se:
 - a) Para todo $x \in X$, existe uma sequência $\{x_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, com $x_N \in X_N$, tal que $x_N \rightarrow^{\mathcal{N}} x$, com $N \rightarrow \infty$, e $\liminf_N f_N(x_N) \leq f(x)$;
 - b) Para toda sequência infinita $\{x_N\}_{N \in \mathbb{K}}$, $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$, tal que $x_N \in X_N$, para todo $N \in \mathbb{K}$, e $x_N \rightarrow^{\mathcal{K}} x$, com $N \rightarrow \infty$, então $x \in X$ e $\liminf_{N \in \mathbb{K}} f_N(x_N) \geq f(x)$.
- Dizemos que as funções semicontínuas superior e de valores não-positivos $\theta_N : X_N \rightarrow \mathbb{R}$ ($\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$) são funções de otimalidade para os problemas P_N (P) se elas se anulam em minimizadores locais de P_N (P).
- Os pares de funções (P_N, θ_N) da sequência $\{(P_N, \theta_N)\}_{N \in \mathbb{N}}$ são aproximações consistentes para o par de funções (P, θ) se P_N epi-converge para P e se para toda sequência $\{x_N\}$ com $x_N \in X_N$ e $x_N \rightarrow x \in X$, tem-se $\liminf_N \theta_N(x_N) \leq \theta(x)$.

Teorema 1 Considere os problemas (P) e (P_N) como definidos acima. Suponha que P_N epi-converge para (P) .

- a) Se $\{\hat{x}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de minimizadores globais de (P_N) e \hat{x} é um ponto de acumulação desta sequência, isto é, existe $\{\hat{x}_N\}_{N \in \mathbb{K}}$ subsequência da sequência original, tal que $\hat{x}_N \rightarrow^{\mathcal{K}} \hat{x}$, então \hat{x} é um minimizador global de (P) e $f_N(\hat{x}_N) \rightarrow^{\mathcal{K}} f(\hat{x})$.
- b) Se $\{\hat{x}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de minimizadores locais de (P_N) , com raio de atração $\rho > 0$ comum, isto é, $\forall N \in \mathbb{N}, f_N(\hat{x}_N) \leq f_N(x)$, para todo $x \in X_N$ tal que $\|\hat{x}_N - x\|_B \leq \rho$, e \hat{x} um ponto de acumulação de $\{\hat{x}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, então \hat{x} é ponto de mínimo local de (P) e $f_N(\hat{x}_N) \rightarrow^{\mathcal{K}} f(\hat{x})$.

Definição 3 Considere uma sequência de conjuntos $\{A_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$.

- a) O ponto \hat{x} é dito ser um ponto limite de $\{A_i\}_{i=0}^\infty$ se $d(\hat{x}, A_i) \rightarrow 0$ com $i \rightarrow \infty$, onde

$$d(\hat{x}, A_i) := \inf\{\|x - \hat{x}\|; x \in A_i\},$$

isto é, existe $x_i \in A_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, tal que $x_i \rightarrow \hat{x}$ com $i \rightarrow \infty$;

- b) O ponto \hat{x} é um ponto de acumulação de $\{A_i\}_{i=0}^\infty$ se é um ponto limite de uma subsequência de $\{A_i\}_{i=0}^\infty$;

c) Denotamos o conjunto de pontos limites de $\{A_i\}_{i=0}^\infty$ por $\liminf A_i$ e chamamos de inner limit, denotamos o conjunto de pontos de acumulação de $\{A_i\}_{i=0}^\infty$ por $\limsup A_i$ e chamamos de outer limit;

- d) Diremos que A_i converge para A se $\liminf A_i = \limsup A_i = A$, denotamos por $A_i \rightarrow A$ ou $\lim A_i = A$.

3 O problema de controle ótimo

Esta teoria foi utilizada por Polak (1997) em um problema de controle. Ele construiu problemas

aproximados e mostrou que estes eram aproximações consistentes para o problema original. Desta forma, ele pôde resolver os problemas aproximados, que neste caso são aproximações consistentes, através de algoritmos já existentes e outros formulados por ele. Assim, pelo teorema (1), se a sequência de minimizadores locais ou globais possui um ponto de acumulação, então este é um ponto de mínimo local ou global do problema original.

Nesta sessão introduziremos o que foi feito em Polak (1997).

Para começar, definimos a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = h(x(t), u(t)), t \in [0, 1], x(0) = \xi, \quad (3)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, o controle $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Sejam $L_2^m[0, 1]$ o espaço das funções de quadrado integrável definidas de $[0, 1]$ em \mathbb{R}^m , e $H_2 := \mathbb{R}^n \times L_2^m[0, 1]$. Definimos

$$H_{\infty, 2} := \mathbb{R}^n \times L_{\infty, 2}^m[0, 1],$$

onde $L_{\infty, 2}^m[0, 1]$ é o espaço das funções de quadrado integrável e essencialmente limitadas, munido do produto interno e a norma de $L_2^m[0, 1]$.

Iremos supor que os controles são elementos do conjunto

$$U := \{L_{\infty, 2}^m[0, 1]; \|u\|_\infty \leq \rho_{\max}\},$$

onde ρ_{\max} é grande suficiente para que todos os controles tenham valores no interior da bola fechada $B(0, \rho_{\max})$.

Defina $H^0 := \mathbb{R}^n \times U^0$, onde

$$U^0 := \{u \in L_{\infty, 2}^m[0, 1]; \|u\|_\infty \leq \gamma \rho_{\max}\},$$

e $\gamma \in (0, 1)$ está próximo de 1.

Consideremos o problema de controle ótimo

$$(P') \min_{\eta \in H_C} f^0(\eta) := F^0(\xi, x^\eta(1)),$$

com $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H_C := \mathbb{R}^n \times U_C$, $U_C := \{u \in U_0; u(t) \in U \subset B(0, \gamma \rho_{\max}), \forall t \in [0, 1]\}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ convexo e compacto, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $f^0 : H^0 \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta = (\xi, u)$ é tal que ξ é a condição inicial para x , e, $x^\eta(\cdot)$ é a solução da equação (3) para η dado.

Hipótese 1 a) A função $h(\cdot, \cdot)$ é de classe C^1 , e existe uma constante $K \in [1, \infty)$ tal que, para todos $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ e $u, \hat{u} \in B(0, \rho_{\max})$ temos

$$\|h(x, u) - h(\hat{x}, \hat{u})\| \leq K[\|x - \hat{x}\| + \|u - \hat{u}\|],$$

$$\|h_x(x, u) - h_x(\hat{x}, \hat{u})\| \leq K[\|x - \hat{x}\| + \|u - \hat{u}\|],$$

$$\|h_u(x, u) - h_u(\hat{x}, \hat{u})\| \leq K[\|x - \hat{x}\| + \|u - \hat{u}\|].$$

b) A função $F^0(\cdot, \cdot)$ é Lipschitz, com primeira derivada Lipschitz, e de classe C^1 , ambos sobre conjuntos limitados.

A função de otimalidade para o problema (P') é dada por

$$\theta(\eta) := \min_{\bar{\eta} \in H_C} \left(\langle \nabla f^0(\eta), \bar{\eta} - \eta \rangle_2 + \frac{1}{2} \|\bar{\eta} - \eta\|_2^2 \right).$$

Prosseguindo como na sessão anterior, podemos definir

$$\mathcal{N} := \{2^k\}_{k=1}^\infty.$$

Agora temos que definir conjuntos H_N cuja dimensão é finita e a união é densa em $H_{\infty,2}$.

Para $k = 0, 1, \dots, N-1$, seja $\pi_{N,k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\pi_{N,k}(t) := \begin{cases} \sqrt{N} \forall t \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}), & \text{se } k \leq N-2 \\ \sqrt{N} \forall t \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}], & \text{se } k = N-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para $N \geq 1$, defina

$$L_N := \{u \in L_{\infty,2}^m[0,1]; u(t) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \pi_{N,k}(t)\},$$

$u_k \in \mathbb{R}^m$.

Fazendo $H_N := \mathbb{R}^n \times L_N \subset H_{\infty,2}$, temos que $\cup H_N$ é densa em $H_{\infty,2}$ e a dimensão de H_N é finita pois as funções $e_j \pi_{N,k}(\cdot)$, $j = 1, \dots, m$, $k = 0, \dots, N-1$, formam uma base ortonormal para L_N . Agora estamos aptos a definir os conjuntos aproximados por

$$H_N^0 := H^0 \cap H_N \text{ e } H_{C,N} := H_C \cap H_N.$$

Segue um resultado de extrema importância para a obtenção dos problemas aproximados.

Proposição 1 Temos que $H_{C,N} \xrightarrow{\mathcal{N}} H_C$, com $N \rightarrow \infty$.

Demonstração 1 Ver referência Polak (1997).

Podemos discretizar, fazendo uso da discretização de Euler, a dinâmica contínua em (P') , obtendo a dinâmica discreta

$$\begin{cases} x_N^\eta(\frac{k+1}{N}) - x_N^\eta(\frac{k}{N}) = \frac{1}{N} h(x_N^\eta(\frac{k}{N}), u(\frac{k}{N})), \\ k = 0, 1, \dots, N-1 \\ x_N^\eta(0) = \xi, \end{cases}$$

que tem uma solução dada por $\{x_N^\eta(k/N)\}_{k=0}^N$ para $\eta \in H_N$.

Temos os problemas aproximados

$$(P'_{C,N}) \quad \min_{\eta \in H_{C,N}} f_N^0(\eta),$$

onde $f_N^0 : H_N^0 \rightarrow \mathbb{R}$.

O teorema a seguir nos fornece a função de otimalidade para o problema $(P'_{C,N})$.

Teorema 2 Suponha que a Hipótese 1 seja satisfeita. Para cada $N \in \mathcal{N}$, seja $\theta_{C,N} : H_{C,N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\min_{\bar{\eta} \in H_{C,N}} \left(\langle \nabla f_N^0(\eta), \bar{\eta} - \eta \rangle_2 + \frac{1}{2} \|\bar{\eta} - \eta\|_2^2 \right).$$

Então,

- $\theta_{C,N}(\cdot)$ tem valores não positivos;
- Se $\hat{\eta} \in H_{C,N}$ é um minimizador local para $(P'_{C,N})$ então $\theta_{C,N}(\hat{\eta}) = 0$;
- A função $\theta_{C,N}(\cdot)$ é contínua para cada $N \in \mathcal{N}$.

Demonstração 2 Ver referência Polak (1997).

O próximo resultado mostra que a família $\{(P'_{C,N}, \theta_{C,N})\}_{N \in \mathcal{N}}$ é uma sequência de aproximações consistentes para o par (P', θ) .

Teorema 3 Suponha que a Hipótese 1 é satisfeita. Então a sequência $\{(P'_{C,N}, \theta_{C,N})\}_{N \in \mathcal{N}}$ é uma sequência de aproximações consistentes para o par (P', θ) .

Demonstração 3 Ver referência Polak (1997).

4 O problema de controle ótimo impulsivo

Considere o seguinte problema de controle ótimo impulsivo

$$\begin{aligned} \min \quad & J(x, \Omega) = J(x(0), x(T)) \\ (\tilde{P}) \quad & dx = f(x, u)dt + g(x, v)d\Omega, t \in [0, T]; \\ & (x(0), x(T)) \in C, \end{aligned}$$

onde $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathcal{M}_{n \times q}$, onde $\mathcal{M}_{n \times q}$ denota o espaço das matrizes de entradas reais de dimensão $n \times q$, $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e convexo, as funções $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$ são mensuráveis no sentido de Borel, essencialmente limitadas e são limitadas por U_C e V_C definidas como na sessão anterior, e, $\Omega := (\mu, \nu, \{v_{t_i}, \psi_{t_i}\})$ é o controle impulsivo. Os objetos que compõem Ω serão definidos a seguir. A primeira componente μ é uma medida definida na sigma álgebra de Borel do intervalo $[0, T]$ tomando valores em um cone $K \subset \mathbb{R}^q$ convexo e fechado. A segunda componente pertence ao conjunto de todas as medidas de Borel escalar não negativas, denotado por $V(\mu)$, tais que $\exists \mu_N : [0, T] \rightarrow K$ e $(\mu_N, |\mu_N|) \rightarrow^* (\mu, \nu)$. As funções $v_{t_i} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^r$ são famílias de funções Borel mensuráveis e essencialmente limitadas com relação a medida de Lebesgue, que estão relacionadas aos átomos da medida μ , i.e., $\{v_{t_i}\}_{i \in \mathcal{I}}$, onde $\Theta := \{t_i \in [0, T] : \mu(t_i) \neq 0\}$, \mathcal{I} é o conjunto de índices atômicos, e $\mu(t)$ é o valor vetorial da medida em K . Resta definir a última componente

de Ω . As funções $\psi_{t_i} : [0, 1] \rightarrow K$ são mensuráveis e satisfazem

- (i) $\sum_{j=1}^q \|\psi_{t_i}^j(\sigma)\| = |\nu|(t_i)$ q.s. $\sigma \in [0, 1]$;
- (ii) $\int_0^1 \psi_{t_i}^j(s) ds = \mu^j(t_i)$, $j = 1, 2, \dots, q$,

para todo $t_i \in \Theta$.

Precisamos da seguinte hipótese.

Hipótese 2 a) As funções $f(\cdot, \cdot)$ e $g(\cdot, \cdot)$ são de classe C^1 , e existem constantes $K', K'' \in [1, \infty)$ tais que, para todos $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $u, \hat{u} \in B(0, \rho_{\max}^1)$ e $v, \hat{v} \in B(0, \rho_{\max}^2)$ temos

$$\begin{aligned} \|f(x, u) - f(\hat{x}, \hat{u})\| &\leq K' [\|x - \hat{x}\| + \|u - \hat{u}\|], \\ \|f_x(x, u) - f_x(\hat{x}, \hat{u})\| &\leq K' [\|x - \hat{x}\| + \|u - \hat{u}\|], \\ \|f_u(x, u) - f_u(\hat{x}, \hat{u})\| &\leq K' [\|x - \hat{x}\| + \|u - \hat{u}\|]. \end{aligned}$$

As mesmas equações são válidas para a função g com sua respectiva constante K'' .

b) A função $f^0(\cdot, \cdot)$ é Lipschitz, com primeira derivada Lipschitz, e de classe C^1 , ambos sobre conjuntos limitados.

Seja o controle impulsivo $\Omega = (\mu, \nu, \{v_{t_i}, \psi_{t_i}\})$, $t_i \in [0, T]$, e um vetor arbitrário $x \in \mathbb{R}^n$. Denote por $\mathcal{X}_{t_i}(\cdot, x)$, a solução para o sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{X}}_{t_i}(s) = g(\mathcal{X}_{t_i}(s), v_{t_i}(s))\psi_{t_i}(s), & s \in [0, 1] \\ \mathcal{X}_{t_i}(0) = x. \end{cases}$$

Primeiramente iremos estudar o sistema impulsivo contido no problema \tilde{P} dado por

$$dx = f(x, u)dt + g(x, v)d\Omega, t \in [0, T]. \quad (4)$$

Considere

$$x_\vartheta := (x(\cdot), \{\mathcal{X}_{t_i}(\cdot)\}_{t_i \in \Theta}), \quad (5)$$

onde $\vartheta := (u, v, \Omega)$, $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é função de variação limitada com os pontos de descontinuidade contidos no conjunto Θ e $\{\mathcal{X}_{t_i}(\cdot)\}_{t_i \in \Theta}$ é a coleção de funções Lipschitz definidas acima. Segue a definição de solução de (4).

Definição 4 Dizemos que x_ϑ é solução de (4) se

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t f(x, u)d\sigma + \int_{[0, t]} g(x, v)d\mu_c + \\ &+ \sum_{t_i \leq t} [\mathcal{X}_{t_i}(1) - x(t_i-)] \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

onde μ_c é a componente contínua de μ .

Agora iremos fazer uma reparametrização do tempo afim de obter um sistema reparametrizado cuja solução é equivalente a solução do sistema (4), a menos de uma reparametrização. É este sistema reparametrizado que será aproximado. Para isto, seja

$$\pi(t) := \frac{t - \nu([0, t])}{T - \nu([0, T])}, \quad t \in [0, T], \quad \pi(0) = 0.$$

Então, existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, T]$ tal que

- $\gamma(s)$ é não decrescente;
- $\gamma(s)$ é absolutamente contínua e $|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq b|s - t|$, $\forall s, t \in [0, 1]$;
- $\gamma(s) = t_i$, $\forall s \in I_i$ e $\forall t_i \in \Theta$, com $I_i = [\pi(t_i-), \pi(t_i)]$,

onde $\pi(t_i-)$ denota o limite lateral a esquerda de π em t_i .

Denotamos por $F(t, \mu) := \mu([0, t])$ se $t \in]0, T]$, e $F(0, \mu) = 0$ a função distribuição da medida μ .

Seja $\phi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^q$ dada por

$$\phi(s) := \begin{cases} F(\gamma(s)) & \text{se } s \in [0, 1] \setminus (\cup_{i \in \mathcal{I}} I_i), \\ F(\gamma(s-)) & \\ + \int_{[\pi(t_i-), s]} \frac{1}{\pi(t_i) - \pi(t_i-)} \psi_{t_i}(\alpha_{t_i}(\sigma)) d\sigma & \text{c.c.,} \end{cases}$$

com $\alpha_{t_i}(\sigma) = (\sigma - \pi(t_i-)) / (\pi(t_i) - \pi(t_i-))$. Veja que $\phi(\cdot)$ é Lipschitz, e denotaremos por \bar{r} sua constante Lipschitz.

Iremos agrupar as funções v e v_{t_i} através da função $\bar{v} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^r$ que é mensurável e definida da seguinte forma

$$\bar{v}(s) := \begin{cases} v(\gamma(s)) & \text{se } s \in [0, 1] \setminus (\cup_{i \in \mathcal{I}} I_i), \\ v_{t_i}(\alpha_{t_i}(s)) & \text{c.c..} \end{cases}$$

Definição 5 Seja

$$y(s) := \begin{cases} x(\gamma(s)) & \text{se } s \in [0, 1] \setminus (\cup_{i \in \mathcal{I}} I_i), \\ \mathcal{X}_{t_i}(\alpha_{t_i}(s)) & \text{se } s \in I_i, \text{ para algum } i \in \mathcal{I}. \end{cases} \quad (6)$$

Então $y_\vartheta = y$ é uma solução reparametrizada de (4) desde que $y(\cdot)$ seja Lipschitz em $[0, 1]$ e satisfaça

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = f(y(s), u(\gamma(s)))\dot{\gamma}(s) + g(y(s), \bar{v}(s))\dot{\phi}(s) & \text{q.s.} \\ y(0) = x(0). \end{cases} \quad (7)$$

Teorema 4 Suponha que o controle impulsivo Ω seja dado e x_ϑ seja como em (5). Então, y_ϑ é uma solução reparametrizada de (4) se e somente se x_ϑ é uma solução de (4).

Demonstração 4 Ver referência Wolenski and Žabić (2006).

Seja

$$S_C := \mathcal{C} \times U_C \times V_C \times \mathcal{P},$$

sendo \mathcal{P} o conjunto de todos os $p := (\mu, \nu, \psi_{t_i})$ que satisfazem as hipóteses do problema (\tilde{P}) .

Representaremos por $y^\eta(s)$ a solução do sistema em (7) para cada η .

Chegamos no seguinte problema reparametrizado

$$(\tilde{P}_{rep}) \min_{\eta \in S_C} J(y^\eta(0), y^\eta(1)).$$

Veja que (\tilde{P}) e (\tilde{P}_{rep}) possuem a mesma solução, a menos de uma reparametrização, pois a função objetivo é a mesma. Assim, iremos utilizar a teoria de aproximações consistentes em (\tilde{P}_{rep}) .

Vamos definir o operador $Ext : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^l$ por

$$Ext[h, \Omega](s) = \begin{cases} h((\mathcal{X}_{t_i}(\alpha_{t_i}(s)), x(t_i-)), \bar{v}(s)) \\ \text{se } t_i \in \Theta, s \in I_i \\ h(x(\gamma(s)), \bar{v}(s)) \text{ c.c..} \end{cases}$$

Considere $p_1 = (\mu_1, \nu_1, \psi_{t_i}^1)$, $p_2 = (\mu_2, \nu_2, \psi_{t_i}^2) \in \mathcal{P}$. Sejam também ζ_j soluções dos sistemas

$$d\zeta_j = d\Omega_j, \quad \zeta_j(0) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Temos a métrica dada no artigo Arutyunov et al. (2009) por

$$\begin{aligned} d_3(p_1, p_2) &= |\nu_1([0, T]) - \nu_2([0, T])| \\ &+ \int_0^T |F_1(t, \nu_1) - F_2(t, \nu_2)| dt \\ &+ \max_{s \in [0, 1]} \|Ext[\zeta_1(\cdot), \Omega_1](s) - Ext[\zeta_2(\cdot), \Omega_2](s)\|. \end{aligned}$$

De acordo com o artigo (Karamzin, 2005), o conjunto \mathcal{P} juntamente com a métrica d_3 é um espaço métrico, e, além disso, é o completamento do conjunto das medidas absolutamente contínuas dadas sobre $[0, T]$ na métrica d_3 .

Note que $S_C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times L_{\infty, 2}^m[0, 1] \times L_{\infty, 2}^r[0, 1] \times \mathcal{P} =: B$. Veja que em B temos a métrica definida abaixo

$$d = d_1 + d_1 + d_2 + \hat{d}_2 + d_3,$$

sendo d_1 a métrica em \mathbb{R}^n , d_2 a métrica em L_2^m , \hat{d}_2 a métrica em L_2^r e d_3 a métrica em \mathcal{P} . Esta será utilizada nas demonstrações de convergência entre elementos de B .

A função de otimalidade para o problema (\tilde{P}_{rep}) é dada por

$$\tilde{\theta}_{rep}(\eta) := \min_{\bar{\eta} \in S_C} \left(\langle \nabla J(\xi), \bar{\xi} - \xi \rangle + \frac{1}{2} [d(\bar{\eta}, \eta)]^2 \right),$$

com $\xi := (y^\eta(0), y^\eta(1))$ e $\bar{\xi} := (y^{\bar{\eta}}(0), y^{\bar{\eta}}(1))$.

Como na seção anterior, queremos obter aproximações consistentes para o problema (\tilde{P}_{rep}) . Para isto, começamos aproximando S_C por $S_{C, N}$.

Primeiramente, definimos \mathcal{N} como anteriormente.

Para o conjunto \mathcal{C} , definimos $\mathcal{C}_N = \mathcal{C}$, $\forall N \in \mathcal{N}$. Assim, $\cup \mathcal{C}_N$ é denso em \mathcal{C} para todo $N \in \mathcal{N}$.

Para aproximar $u(\gamma(s))$ e $\bar{v}(s)$, prosseguiremos como anteriormente, definindo

$$L_N^m := \{u \in L_{\infty, 2}^m[0, 1]; u(s) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \pi_{N, k}(s)\},$$

$$u_k \in \mathbb{R}^m,$$

$$L_N^r := \{v \in L_{\infty, 2}^r[0, 1]; v(s) = \sum_{k=0}^{N-1} v_k \pi_{N, k}(s)\}$$

$$v_k \in \mathbb{R}^r.$$

Note que $\cup L_N^m$ e $\cup L_N^r$ são densos em $L_{\infty, 2}^m[0, 1]$ e $L_{\infty, 2}^r[0, 1]$, respectivamente.

Seja \mathcal{P}_N dado por

$$\mathcal{P}_N := \{(\mu_N, \nu_N, 0); \mu_N \in Z_N \text{ e } \nu_N := |\mu_N|\},$$

onde $|\mu_N|$ é a variação total da medida μ_N e

$$Z_N := \{\mu : [0, T] \rightarrow K; \mu([0, t]) = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{\pi}_{N, j}(t)\},$$

$$\bar{\pi}_{N, j}(t) := \begin{cases} b_j + \frac{t - \bar{t}_j}{\bar{t}_{j+1} - \bar{t}_j} (b_{j+1} - b_j), \forall t \in [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+1}), \\ j = 0, \dots, N-1, 0 = \bar{t}_0 < \dots < \bar{t}_N = T \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$b_j \in K$, $\mu : [0, T] \rightarrow K$ pois K convexo. Perceba que as medidas μ_N são absolutamente contínuas.

Agora façamos

$$S_N = \mathcal{C}_N \times L_N^m \times L_N^r \times \mathcal{P}_N.$$

Definamos

$$S_{C, N} := S_C \cap S_N.$$

Lema 1 $\cup \mathcal{P}_N$ é densa em \mathcal{P} .

Demonstração 5 Sabemos que $\cup \mathcal{P}_N \subset \mathcal{P}$, logo, $\overline{\cup \mathcal{P}_N} \subseteq \mathcal{P}$. Assim, devemos mostrar que $\mathcal{P} \subset \overline{\cup \mathcal{P}_N}$. Para isto, seja $p := (\mu, \nu, \psi_{t_i}) \in \mathcal{P}$. Vamos mostrar que existe sequência em $\cup \mathcal{P}_N$ convergindo para p na métrica d_3 .

De acordo com o artigo (Wolenski and Žabić, 2007), dado Ω é possível construir uma sequência de medidas $\mu_N : [0, T] \rightarrow K$ que são absolutamente contínuas, e sequências de funções $\gamma_N : [0, 1] \rightarrow [0, T]$ e $\phi_N : [0, 1] \rightarrow K$, que convergem no gráfico para (μ, ϕ) . A definição de convergência no gráfico de medidas também encontra-se no artigo citado acima. Sendo a convergência no gráfico mais forte que a convergência fraca* segue que $\mu_N \rightarrow^* \mu$, $N \rightarrow \infty$.

Veja que existe a convergência $p_N := (\mu_N, \nu_N, 0) \xrightarrow{d_3} p$, onde $\nu_N := |\mu_N|$, pois sendo $|\mu_N|$ limitada, existe uma subsequência de ν_N que converge fraca* para ν , e assim, $(\mu_{N_k}, \nu_{N_k}) \rightarrow^* (\mu, \nu)$, $k \rightarrow \infty$. Segue por um resultado de (Karamzin, 2005) que $F(t, \nu_{N_k}) \rightarrow F(t, \nu)$ q.s.. Também temos que $\nu_{N_k}([0, T]) \rightarrow \nu([0, T])$ em módulo. Pelo teorema da convergência dominada, encontrado em (Folland, 1999), $F(t, \nu_{N_k}) \rightarrow F(t, \nu)$ em $L_1[0, T]$. Sabendo que $\phi_N \rightarrow \phi$ uniformemente, então $\phi_{N_k} \rightarrow \phi$ uniformemente, $k \rightarrow \infty$, segue a convergência desejada. Logo, existe uma subsequência de p_N tal que $p_{N_k} \xrightarrow{d_3} p$, e esta pode ser vista como uma sequência em $\cup \mathcal{P}_N$, demonstrando o desejado.

Pela densidade da união de cada conjunto, segue que $\cup S_N$ é denso em B . Mas S_N não possui dimensão finita, pois \mathcal{P}_N não é de dimensão finita. Apesar disto, a teoria continua a mesma, o que mudará é que os algoritmos desenvolvidos em (Polak, 1997) deverão sofrer modificações.

Teorema 5 $S_{C,N} \rightarrow^{\mathcal{N}} S_C$, $N \rightarrow \infty$.

Demonstração 6 Verifiquemos que $S_C \subset \lim S_{C,N}$. Para isto, tome $\eta = (\xi_0, \xi_1, u, v, p) \in S_C$, com $p = (\mu, \nu, \psi_{t_i})$. Precisamos construir uma sequência em $S_{C,N}$ que possua uma subsequência convergindo para η .

Como $\mathcal{C}_N = \mathcal{C} \ \forall N \in \mathcal{N}$, podemos tomar $\xi_N = (\xi_0, \xi_1) \ \forall N \in \mathcal{N}$, e assim temos $\xi_N \rightarrow^{d_1+d_1} (\xi_0, \xi_1)$, $N \rightarrow \infty$. Sendo $\cup L_N^m[0,1]$ e $\cup L_N^r[0,1]$ densos em $L_{\infty,2}^m[0,1]$ e $L_{\infty,2}^r[0,1]$, respectivamente, segue que existem $u_N(s) \in L_N^m[0,1] \cap U_C$ e $v_N(s) \in L_N^r[0,1] \cap V_C$ tais que $u_N \rightarrow^{d_2} u$ e $v_N \rightarrow^{\hat{d}_2} v$, $N \rightarrow \infty$. Pelo Lema (1), existe sequência p_N em \mathcal{P}_N que possui subsequência convergindo para p .

Para verificar que $\lim S_{C,N} \subset S_C$, tome $\{\eta_N\}_{N \in \mathcal{N}}$ sequência em $S_{C,N}$ tal que a subsequência $\{\eta_{N_k}\}_{k \in \mathcal{N}}$ converge na métrica d para $\eta := (\xi, u, v, p)$. Precisamos mostrar que $\eta \in S_C$. Note que $\eta_N := (\xi_N, u_N, v_N, p_N)$, e que $\overline{\cup \mathcal{C}_N} = \mathcal{C}$, $\overline{\cup L_N^m} = L_{\infty,2}^m[0,1]$, $\overline{\cup L_N^r} = L_{\infty,2}^r[0,1]$ e $\overline{\cup \mathcal{P}_N} = \mathcal{P}$, pelo Lema (1), logo $\eta \in S_C$, obtendo o resultado desejado.

Podemos discretizar, fazendo uso da discretização de Euler, a equação em (7) obtendo

$$\begin{aligned} y_N^\eta(c_{k+1}) - y_N^\eta(c_k) &= f(y_N^\eta(c_k), u(c_k)) (\gamma_N^\eta(c_{k+1}) - \gamma_N^\eta(c_k)) \\ &\quad + g(y_N^\eta(c_k), v(c_k)) (\phi_N^\eta(c_{k+1}) - \phi_N^\eta(c_k)), \\ k &= 0, \dots, N-1, \ y_N^\eta(0) = y(0) \text{ e } y_N^\eta(1) = y(1), \ c_k = \frac{k}{N}. \end{aligned}$$

Temos os problemas aproximados

$$(\tilde{P}_{rep}^{C,N}) \min_{\eta \in S_{C,N}} J_N(y_N^\eta(0), y_N^\eta(1)),$$

onde $J_N(y_N^\eta(0), y_N^\eta(1)) := J(y_N^\eta(0), y_N^\eta(1))$, e, cuja função de otimalidade $\tilde{\theta}_{rep}^{C,N}$ é dada por

$$\min_{\bar{\eta} \in S_{C,N}} \left(\langle \nabla J_N(\xi_N), \bar{\xi}_N - \xi_N \rangle + \frac{1}{2} [d(\bar{\eta}, \eta)]^2 \right),$$

com $\xi_N := (y_N^\eta(0), y_N^\eta(1))$ e $\bar{\xi}_N := (y_N^{\bar{\eta}}(0), y_N^{\bar{\eta}}(1))$.

Teorema 6 Suponha que a hipótese (2) seja satisfeita. Então $\{(\tilde{P}_{rep}^{C,N}, \tilde{\theta}_{rep}^{C,N})\}_{N \in \mathcal{N}}$ é uma sequência de aproximações consistentes para o par $(\tilde{P}_{rep}, \tilde{\theta}_{rep})$.

5 Conclusões

A literatura sobre métodos numéricos para problemas de controle ótimo impulsivo é bastante escassa. Existem resultados sobre aproximação discreta por Euler para sistemas de controle impulsivos, mas sem a otimização.

Queremos demonstrar a eficácia do método de aproximações consistentes para problemas de controle ótimo impulsivo dados como em (\tilde{P}) . Isto é importante pois daremos uma caracterização para se obter solução do problema descrito na seção anterior utilizando métodos numéricos, já conhecidos, a serem aplicados em problemas aproximados pelo método de Euler.

Agradecimentos

Agradecemos à Fapesp processos 2011/14121 – 9 e 2013/07375 – 0, e ao CNPq processo 309335/2012 – 4 pelo apoio financeiro para desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- Arutyunov, A., Karamzin, D. and Pereira, F. L. (2011). *On a generalization of the impulsive control concept: controlling system jumps*, Discrete Contin. Dyn. Syst.
- Arutyunov, A. V., Karamzin, D. Y. and Pereira, F. (2010). *L. S. Pontryagin's maximum principle for optimal impulsive control problems*, Dokl. Akad. Nauk.
- Arutyunov, A. V., Karamzin, D. Y. and Pereira, F. D. (2009). *On impulsive control problems with constraints: control of jumps of systems*, Sovrem. Mat. Prilozh.
- Folland, G. B. (1999). *Real analysis*, John Wiley & Sons Inc.
- Karamzin, D. Y. (2005). *Necessary conditions for the minimum in an impulsive optimal control problem*, Sovrem. Mat. Prilozh.
- Pironneau, O. and Polak, E. (2002). *Consistent approximations and approximate functions and gradients in optimal control*, SIAM J. Control Optim. DOI: [10.1137/S0363012900369599](https://doi.org/10.1137/S0363012900369599)
- Polak, E. (1997). *Optimization*, Springer-Verlag. DOI: [10.1007/978-1-4612-0663-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0663-7)
- Silva, G. N. and Vinter, R. B. (1997). *Necessary conditions for optimal impulsive control problems*, SIAM J. Control Optim. DOI: [10.1137/S0363012995281857](https://doi.org/10.1137/S0363012995281857)
- Wolenski, P. R. and Žabić, S. (2006). *A differential solution concept for impulsive systems*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.
- Wolenski, P. R. and Žabić, S. (2007). *A sampling method and approximation results for impulsive systems*, SIAM J. Control Optim. DOI: [10.1137/040620734](https://doi.org/10.1137/040620734)