

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Análise de Sensibilidade da Taxa de Acidente de uma Planta Industrial por Cadeias de Markov e Teoria de Perturbação Generalizada (GPT)

Eduardo F. de Lima<sup>1</sup>Danielle G. Teixeira<sup>2</sup>Paulo Fernando F. Frutuoso e Melo<sup>3</sup>Fernando C. da Silva<sup>4</sup>

Programa de Engenharia Nuclear, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

**Resumo.** A GPT (Teoria da Perturbação Generalizada) é aplicada à análise de confiabilidade de um sistema com 3 canais de proteção iguais de uma planta industrial. Verifica-se a influência da taxa de demanda ( $\nu$ ) e da fração de falhas de causa comum sobre a frequência de acidente. A análise direta de sensibilidade já foi usada para estudar a influência destes parâmetros, em que se resolve o sistema de equações diferenciais oriundo da abordagem por Cadeias de Markov. Obtém-se a frequência de acidentes em função da taxa de demanda e da fração de falhas de causa comum. Com a GPT, a obtenção destas curvas torna-se mais simples. Para o intervalo  $\nu < 1000/\text{ano}$ , cálculos de GPT com aproximações de 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> ordens foram melhores que os com a aproximação de 1<sup>a</sup> ordem. Para  $\nu > 1000/\text{ano}$  a aproximação de 1<sup>a</sup> ordem teve um comportamento melhor que as de 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> ordens.

**Palavras-chave.** Canais de proteção, Frequência de acidentes, Cadeias de Markov, Confiabilidade, GPT.

## 1 Introdução

A GPT é um método heurístico usado na engenharia nuclear [2]. A aplicação de GPT em análise de confiabilidade, baseando-se em Cadeias de Markov, é discutida em [1]. A frequência de acidente de uma planta equipada com um canal de proteção em função da taxa de demanda do sistema é analisada em [3]. Diversos trabalhos, como [4], comprovam a importância de se determinar a frequência de acidente de um sistema em função da taxa de demanda. Estendendo a aplicação da GPT, este trabalho faz a análise de sensibilidade da frequência de acidente em uma planta com um sistema de três canais redundantes de proteção. Devido à redundância, é necessário levar em consideração a ocorrência de falhas de causa comum, para cujo tratamento existem modelos tais o dos Parâmetros Básicos,

---

<sup>1</sup>lima@nuclear.ufrj.br<sup>2</sup>dteixeira@nuclear.ufrj.br<sup>3</sup>frutuoso@nuclear.ufrj.br<sup>4</sup>fernando@nuclear.ufrj.br

das Letras Gregas Múltiplas e o do fator  $\alpha$  [5]. Neste trabalho, foi usado este último, pela facilidade de obtenção de valores de seus parâmetros na prática.

## 2 O Problema de 3 Canais

O diagrama de transição com uma lógica de falha 2 – 3 :  $F$  é mostrado na Fig.1. Esta lógica de falha significa que a falha do sistema ocorrerá se pelo menos 2 dos 3 canais falharem ( $F =$  falha). O retângulo pontilhado contém os estados de falha que seriam considerados se o reparo fosse on-line, ou seja o reparo só é feito com a planta desligada. Assim, não são considerados os estados 6,9 e 10. Os parâmetros do terno  $\langle i, j, l \rangle$  representam  $i =$  número de canais em funcionamento,  $j =$  número de canais com falha não revelada e  $l =$  número de canais com falha revelada, quando o seu reparo é efetuado.  $\lambda_k$  é a taxa de falha simultânea de  $k$  canais idênticos, obtida do modelo  $\alpha$  pelo uso do parâmetro  $\alpha_k$  que representa a probabilidade de falha simultânea de  $k$  dos  $m$  canais idênticos,  $\mu$  é a taxa de reparo de um canal,  $\nu$  é a taxa de demanda do sistema,  $\gamma$  é probabilidade de reparo de um canal não ser adequadamente feito e o número de equipes de reparo é igual ao de canais. As taxas  $\lambda_m, \mu$  e  $\nu$  são constantes, o que implica que os tempos de falha, de reparo e de demanda seguem distribuições exponenciais.

O modelo  $\alpha$  [5] permite calcular  $\lambda_k$  através da expressão  $\lambda_k = \frac{k}{\binom{m-1}{k-1}} \frac{\alpha_k}{\alpha_T} \lambda$  em

que estamos considerando que o teste dos  $m=3$  canais é simultâneo.  $\lambda$  é a taxa de falha total, que inclui falhas independentes e de causa comum,  $\alpha_T = \sum_{k=1}^m k\alpha_k$  e  $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 1$ . A equação diferencial que governa o sistema é dada por:

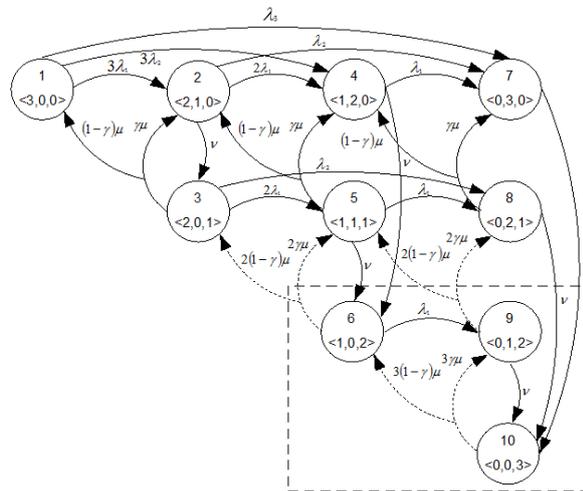


Figura 1: Diagrama de transição para 3 canais iguais usando uma lógica de falha 2 – 3 :  $F$ .

$$\dot{\underline{p}} = M \underline{p}(t) \tag{1}$$

onde  $\underline{p}(t) \equiv [ p_1(t) \dots p_{10}(t) ]^T$  e  $p_s(t)$ ,  $s = 1, 2, \dots, 10$ , é a probabilidade do sistema estar no estado  $i$  em  $t$  e  $M$  é a matriz de transição, construída considerando as transições de estado mostradas na Fig.1. Por exemplo,  $M_{2,4} = 2\lambda_1$ , que representa a taxa de transição do estado 2 para o 4. O fator 2 nesta taxa de transição significa que, como há 2 canais funcionando no estado 2 e um estado 4 e ocorre somente uma falha, existem duas possibilidades desta falha ocorrer.

Admitindo que os canais estejam operacionais em  $t = 0$ , teremos  $\underline{p}(0) = [ 1 \ 0 \ \dots \ 0 ]^T$ .

Como a lógica de falhas é  $2 - 3 : F$ , a frequência de acidente da planta  $\eta$ , será [4] (não estamos levando em conta o reparo on-line dos canais):

$$\eta = \frac{\nu}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} [ p_4(t) + p_5(t) + p_7(t) + p_8(t) ] dt. \tag{2}$$

A equação (2) pode se escrita como:

$$\eta = \int_0^{\tau_p} \underline{h}^{+T} \underline{p}(t) dt \tag{3}$$

onde  $\underline{h}^{+T} = \frac{n}{\tau_p} \underline{p}_T$  e  $\underline{p}_T = [ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 ]^T$ .

A perturbação em  $\alpha_1$  e  $\nu$  dará uma frequência  $\eta'$  por uma expansão em série de Taylor:

$$\eta' = \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n \eta}{\partial \alpha_1^n} (\delta \alpha_1)^n + \frac{\partial^n \eta}{\partial \nu^n} (\delta \nu)^n \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \left\{ \frac{\partial^n \eta}{\partial \alpha_1^{n-m} \partial \nu^m} (\delta \alpha_1)^{n-m} (\delta \nu)^m \right\} \right] \tag{4}$$

onde, a partir da equação (3), tem-se:

$$\frac{\partial^n \eta}{\partial \alpha_1^n} = \int_0^{\tau_p} \underline{h}^{+T} \frac{\partial^n \underline{p}(t)}{\partial \alpha_1^n} dt. \tag{5}$$

$$\frac{\partial^n \eta}{\partial \nu^n} = \int_0^{\tau_p} \underline{h}^{+T} \frac{\partial^n \underline{p}(t)}{\partial \nu^n} dt + \begin{cases} \frac{n}{\nu} \eta; & \text{se } n = 1 \\ \frac{n}{\nu} \int_0^{\tau_p} \underline{h}^{+T} \frac{\partial^{n-1} \underline{p}(t)}{\partial \nu^{n-1}} dt; & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^n \eta}{\partial \alpha_1^{n-m} \partial \nu^m} = \int_0^{\tau_p} \underline{h}^{+T} \frac{\partial^n \underline{p}(t)}{\partial \alpha_1^{n-m} \partial \nu^m} dt + \begin{cases} \frac{1}{\nu} \int_0^{\tau_p} \underline{h}^{+T} \frac{\partial^{n-1} \underline{p}(t)}{\partial \alpha_1^{n-1}} dt; & \text{se } m = 1 \\ \frac{m}{\nu} \int_0^{\tau_p} \underline{h}^{+T} \frac{\partial^{n-1} \underline{p}(t)}{\partial \alpha_1^{n-m} \partial \nu^{m-1}} dt; & \text{se } m > 1 \end{cases} \tag{7}$$

As derivadas de  $\underline{p}(t)$  em relação aos parâmetros  $\alpha_1$  e  $\nu$  são soluções das equações:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^n}{\partial \alpha_1^n} \underline{p}(t) \right) = M \left( \frac{\partial^n}{\partial \alpha_1^n} \underline{p}(t) \right) + \underline{S}_1^{(n)}(t) \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^n}{\partial \nu^n} \underline{p}(t) \right) = M \left( \frac{\partial^n}{\partial \nu^n} \underline{p}(t) \right) + \underline{S}_\nu^{(n)}(t) \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^n}{\partial \alpha_1^{n-m} \partial \nu^m} \underline{p}(t) \right) = M \left( \frac{\partial^n}{\partial \alpha_1^{n-m} \partial \nu^m} \underline{p}(t) \right) + \underline{S}_{1\nu}^{(n-m,n)}(t) \tag{10}$$

cujos termos fonte são dados por:

$$\underline{S}_1^{(n)}(t) = M_1 \left\{ a_n \underline{p}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_i \left( \frac{\partial^{n-i}}{\partial \alpha_1^{n-1}} \underline{p}(t) \right) \right\} \tag{11}$$

$$\underline{S}_\nu^{(n)}(t) = M_\nu \left\{ \underline{p}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{\partial^{n-i}}{\partial \nu^{n-i}} \underline{p}(t) \right\} \tag{12}$$

$$\underline{S}_{1\nu}^{(n-m,m)}(t) = M_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-m}{l} a_i \left( \frac{\partial^{n-l}}{\partial \alpha_1^{n-m-l} \partial \nu^m} \underline{p}(t) \right) + a_i \frac{\partial^m}{\partial \nu^m} \underline{p}(t) \right\} + m M_\nu \left( \frac{\partial^{n-l}}{\partial \alpha_1^{n-m} \partial \nu^{m-1}} \underline{p}(t) \right) \tag{13}$$

onde:  $a_i = \frac{i! 2^{i-1}}{(3 - [2\alpha_1 + \alpha_2])^i}$ , com  $i = 1, 2, 3$  e

$$M_1 = 2M' + \lambda M_\lambda^{(1)}. \tag{14}$$

A matriz  $M_\nu$  é obtida da matriz  $M$  derivando os elementos desta última em relação à taxa de demanda  $\nu$ . Os elementos da matriz  $M_\lambda^1$  são obtidos a partir dos da matriz  $M$  derivando os desta última em relação à taxa de falha  $\lambda_1$ . A matriz  $M'$  é obtida da matriz  $M$  preservando os elementos desta última que envolvem taxas de falha  $\lambda_m$  e tornando nulos todos os demais.

Pela Relação de Reciprocidade de Fontes [6], as equações (5)-(7) se tornam:

$$\int_0^{\tau_p} \underline{h}^{+T} \frac{\partial^n \underline{p}(t)}{\partial \alpha_1^n} dt = \int_0^{\tau_p} \underline{p}^{*T}(t) \underline{S}_1^n(t) dt \tag{15}$$

$$\int_0^{\tau_p} \underline{h}^{+T} \frac{\partial^n \underline{p}(t)}{\partial \nu^n} dt = \int_0^{\tau_p} \underline{p}^{*T}(t) \underline{S}_\nu^n(t) dt \tag{16}$$

$$\int_0^{\tau_p} \underline{h}^{+T} \frac{\partial^n \underline{p}(t)}{\partial \alpha_1^{n-m} \partial \nu^m} dt = \int_0^{\tau_p} \underline{p}^{*T}(t) \underline{S}_{1\nu}^{n-m,n}(t) dt \tag{17}$$

onde  $\underline{p}^*(t)$ , a função importância associada à quantidade integral  $\eta$ , é solução da equação:

$$-\frac{d}{dt} \underline{p}^*(t) = M^T \underline{p}^{*T}(t) \underline{h}^{+T} \tag{18}$$

Substituindo as equações (15), (16) e (17) nas equações (5), (6) e (7), respectivamente, e as equações resultantes na equação (4) obtém-se:

$$\eta' = \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \left( \int_0^{\tau_p} \underline{p}^{*T}(t) \underline{S}_1^{(n)}(t) dt \right) (\delta\alpha_1)^n + \left( \int_0^{\tau_p} \underline{p}^{*T}(t) \underline{S}_\nu^{(n)}(t) dt \right) (\delta\nu)^n \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \binom{n}{m} \left\{ \left( \int_0^{\tau_p} \underline{p}^{*T}(t) \underline{S}_{1\nu}^{(n-m,m)}(t) dt \right) (\delta\alpha_1)^{n-m} (\delta\nu)^m \right\} \right] + \frac{1}{\nu} \eta (\delta\nu) + \tag{19}$$

$$\frac{1}{\nu} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!} \left\{ \left( \int_0^{\tau_p} \underline{p}^{*T}(t) \underline{S}_\nu^{(n-1)}(t) dt \right) (\delta\nu)^n + \left( \int_0^{\tau_p} \underline{p}^{*T}(t) \underline{S}_1^{(n-1)}(t) dt \right) (\delta\alpha_1)^{n-1} (\delta\nu) \right\} + \frac{1}{\nu} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{m=2}^{n-1} \binom{n}{m} m \left( \int_0^{\tau_p} \underline{p}^{*T}(t) \underline{S}_{1\nu}^{(n-m,m)}(t) dt \right) (\delta\alpha_1)^{n-m} (\delta\nu)^m \right\}$$

onde  $\underline{S}_1$ ,  $\underline{S}_\nu$  e  $\underline{S}_{1\nu}$  foram definidas nas equações (11), (12) e (13).

### 3 Resultados

O uso da GPT na análise de sensibilidade da frequência de acidente  $\eta$  de uma planta (usando um sistema de 3 canais de proteção idênticos), foi feito perturbando os parâmetros  $\nu$  e  $\alpha_1$ . Usamos como tempo de missão ( $\tau_p$ ) 1 ano; taxa de falha ( $\lambda$ ) de 10 /ano; taxa de reparo ( $\mu$ ) de 365/ano e a probabilidade de falha no reparo ( $\gamma$ ) de 1%, conforme [7]. Além disso, os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  foram assim tratados:  $\alpha_1 = 0,7 + 0,05(n - 1)$ ; para  $n = 1, \dots, 5$  e  $\alpha_2 = 0,1$ , considerando-se 0,8 como o valor de referência para  $\alpha_1$ . Para cada valor de  $\alpha_1$ , foram adotadas variações em  $\nu$  de acordo com a Tabela 1. Como a faixa de variação da taxa de demanda é muito grande, a Tabela 1 apresenta os 12 casos que foram abordados para a análise do problema. Cada caso representa um intervalo de variação, para o qual foi definido um valor de referência, empregado para o cálculo direto da taxa de acidente, usando a equação (3), à qual nos referimos nos gráficos dos resultados (que comentaremos a seguir) como solução direta. Os cálculos de sensibilidade usando GPT significam resolver o sistema de equações diferenciais da equação (1) 60 vezes, pois foram adotados 5 valores de referência do parâmetro  $\alpha_1$  e, para cada valor de referência, o sistema foi resolvido para 12 taxas de demanda de referência (ver Tabela 1). Comparativamente, os resultados apresentados em [8] necessitaram de solução do mesmo sistema mais de 600 vezes.

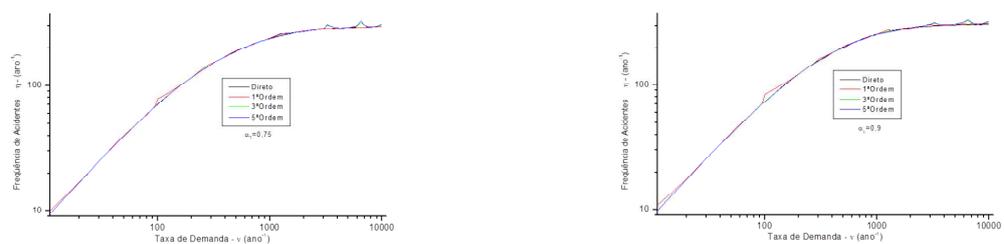
As aproximações de 3ª e 5ª ordens foram melhores para  $\nu < 1000$ /ano, enquanto que para  $\nu > 1000$ /ano, a aproximação de 1ª ordem foi melhor (ver a Figura 2(a) e 2(b), que representam os resultados para  $\alpha_1 = 0.75$  e  $\alpha_2 = 0.9$ ). Para  $\nu < 1000$ /ano, a frequência de acidente em função da taxa de demanda cresce rapidamente [8], havendo a necessidade de se usar altas ordens da série de Taylor para  $\eta$  neste intervalo. Diante disso, as aproximações

de 3ª e 5ª ordens foram melhores enquanto a aproximação de 1ª ordem chegou a ter um desvio de até 8,8% para  $\nu = 100/\text{ano}$ .

Tabela 1: Variações da taxa de demanda  $\nu$ .

Caso	Intervalo, $\nu(\text{/ano})$	$\nu$ Referência	Parâmetro $\nu$ perturbado
1	$1 \leq \nu \leq 9$	5	$1 + 1(n - 1); n = 1, \dots, 9$
2	$10 \leq \nu \leq 50$	30	$10 + 5(n - 1); n = 1, \dots, 9$
3	$55 \leq \nu \leq 95$	75	$55 + 5(n - 1); n = 1, \dots, 9$
4	$100 \leq \nu \leq 300$	200	$100 + 25(n - 1); n = 1, \dots, 9$
5	$300 \leq \nu \leq 500$	400	$300 + 25(n - 1); n = 1, \dots, 9$
6	$500 \leq \nu \leq 750$	625	$500 + 25(n - 1); n = 1, \dots, 11$
7	$750 \leq \nu \leq 1000$	875	$750 + 25(n - 1); n = 1, \dots, 11$
8	$1000 \leq \nu \leq 2000$	1500	$1000 + 250(n - 1); n = 1, \dots, 5$
9	$2000 \leq \nu \leq 3000$	2500	$2000 + 250(n - 1); n = 1, \dots, 5$
10	$3000 \leq \nu \leq 4000$	3500	$3000 + 250(n - 1); n = 1, \dots, 5$
11	$4000 \leq \nu \leq 6000$	5000	$4000 + 250(n - 1); n = 1, \dots, 9$
12	$6000 \leq \nu \leq 10000$	8000	$6000 + 500(n - 1); n = 1, \dots, 9$

Para  $\nu > 1000/\text{ano}$ , a função é praticamente assintótica [8] e suas derivadas de ordens superiores são próximas de zero. Como a aproximação de 1ª ordem não usa essas derivadas, seus resultados são melhores neste intervalo. As aproximações de 3ª e 5ª ordens usam-nas e, portanto, tendem a aumentar o seu desvio, chegando a 12,6% para  $\nu = 6500/\text{ano}$  na aproximação de 5ª ordem. Existe também a dificuldade de se trabalhar com números tão pequenos (devido à aproximação da curva a uma assíntota), aumentando o erro do resultado.



(a) Frequência de acidentes em função de taxa de demanda de  $\alpha_1 = 0.75$  (b) Frequência de acidentes em função de taxa de demanda de  $\alpha_1 = 0.9$

Figura 2: Frequência de acidentes em função de taxa de demanda (a) e (b)

## 4 Conclusões

Este trabalho analisou a sensibilidade de um sistema de proteção de três canais considerando como quantidade integral a taxa de acidente da planta. Esta redundância, torna os cálculos extensivos quando feitos através da abordagem tradicional. A análise da sensibilidade do sistema foi bastante satisfatória, sendo recomendada a GPT para tal abordagem. Pode-se verificar que as aproximações de 1<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> ordens tiveram bons resultados em relação ao cálculo direto.

## Referências

- [1] A. Gandini, Importance and sensitivity analysis in assessing system reliability, *IEEE Transactions on Reliability*. V 39, pp. 61-70, 1990.
- [2] F. C. Silva, and A. Gandini, Perturbation techniques for reactor life cycle analysis, *Proceedings of the International Topical Meeting on Advances in Reactor Physics, Mathematics and Computation*, Paris, France, pp. 1253-1258, 1987.
- [3] P. F. Frutuoso e Melo, A . C. M. Alvim and F. C. Silva, Sensitivity Analysis on the Accident Rate of a Plant Equipped with a Single Protective Channel by Generalized Perturbation Methods, *Annals Nuclear Energy* V.25, pp.1191-1207, 1998.
- [4] P. F. Frutuoso e Melo, L. F. Oliveira, and R.Youngblood, Markovian models for the reliability analysis of multichannel protective systems. *Proceedings of II International conference on Probabilistic Safety Assessment and Management*, San Diego, CA, 1994.
- [5] A. Mosleh, and N. O. Siu, A multi-parameter common cause failure model, In: *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Vol. M1, pp. 147-152, Lausanne, Switzerland, 1987.
- [6] F. C. Silva, Desenvolvimento de métodos da teoria de perturbação generalizada (GPT) e suas aplicações à física de reatores. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.
- [7] Oliveira, L. F., Youngblood, R. and Frutuoso e Melo, P. F., Hazard rate of a plant equipped with a two-channel protective system subject to a high demand rate, *Reliability Engineering and System Safety*, V. 28, pp.35-58, 1990.
- [8] P. F. Frutuoso e Melo, L. F. Oliveira, R.Youngblood, A Markovian model for the reliability analysis of multichanneled protective systems considering revealed failures and common-cause failures by the alpha model. In: *Anais do IX Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*. Rio de Janeiro, RJ: Associação Brasileira de Energia Nuclear, p.440-446, 1993.