

# Solução do problema de Riemann para escoamento de água-óleo na presença de solvente em meio poroso.

Yvonne Santa Cruz Cárdenas<sup>1</sup>

LAMAP, UFJF, Juiz de Fora, MG

Prof. Dr. Grigori Chapiro<sup>2</sup>

LAMAP, UFJF, Juiz de Fora, MG

Dr. Luis Fernando Lozano Guerrero<sup>3</sup>

LAMAP, UFJF, Juiz de Fora, MG

**Resumo.** Este trabalho estuda o sistema de leis de conservação que descreve o modelo simplificado do trabalho de Walsh e Lake (1989). Foi resolvido o problema de Riemann correspondente classificando as possíveis soluções de acordo com a saturação de água no ponto de injeção. Foram encontradas três possibilidades: (1) onda de choque, (2) onda de rarefação, (3) ondas compostas. Foi demonstrado que a onda de choque é entrópica. Para isso, foi provado que a existência da solução na forma de ondas viajantes do problema viscoso associado conectando os equilíbrios correspondentes aos estados do problema de Riemann na forma de  $\alpha$  e  $\omega$ -limites. Todos os resultados teóricos foram validados através de simulações numéricas.

**Palavras-chave.** Leis de conservação. Ondas viajantes. Problema de Riemann. Injeção de solventes em meios porosos. Recuperação avançada de petróleo.

## 1 Introdução

A injeção de solventes é uma técnica de recuperação avançada de petróleo. É um dos primeiros métodos de produção de óleo adicional que melhora a mobilidade do fluido deslocado, implicando num aumento do fator de recuperação [1]. Em [2] é mostrado um sistema de leis de conservação que estuda o deslocamento de óleo por um solvente miscível na fase aquosa imiscível. O fluxo fracionário de água é considerado como uma função dependendo da saturação de água e do volume fracionário de solvente na fase oleica, entre outras considerações. Os autores mostram um procedimento gráfico para determinar a solução, encontram uma taxa ótima de água com solvente entre outros.

Neste trabalho estudamos uma versão mais simples do modelo mostrado em [2], considerando o fluxo fracionário de água só como função da saturação de água. Provamos a existência da solução na forma de ondas viajantes. Resolvemos o problema de Riemann fixando o estado mais (ou condição inicial) e variando o estado menos (condição de injeção). Verificamos os resultados numericamente usando MATLAB e RCD (Reaction-Convection-Diffusion Equations' Solver), ver [3] para detalhes.

## 2 Solução na forma de ondas viajantes

Em [2], um sistema de leis de conservação é dado e o estudamos num caso particular considerando o fluxo fracionário da água como uma função que só depende da saturação da água:

$$\partial_t S_w + \partial_x f_w = 0, \quad \partial_t (C_{so} S_o) + \partial_x (C_{so} f_o) = 0, \quad (1)$$

<sup>1</sup>yvonne@ice.ufjf.br

<sup>2</sup>grigori@ice.ufjf.br

<sup>3</sup>luisfer99@gmail.com

onde  $S_w$  é a saturação de água,  $S_o$  é a saturação de óleo,  $C_{so}$  é o volume fracionário de solvente na fase oleica,  $f_w$  é o fluxo fracionário da água e  $f_o$  é o fluxo fracionário do óleo, definidos por:

$$f_w + f_o = 1, \quad f_w(S_w) = (K_{rw}/\mu_w)(K_{rw}/\mu_w + K_{ro}/\mu_o)^{-1}, \quad (2)$$

onde  $\mu_w$  e  $\mu_o$  são viscosidades constantes, dadas na Tabela 1. As permeabilidades relativas da fase aquosa  $K_{rw}$  e da fase oleica  $K_{ro}$  são funções de  $S_w$  como definidas a seguir

$$K_{rw}(S_w) = \begin{cases} 0, & S_w < S_{wc}, \\ S^2, & S_{wc} < S_w \leq 1, \end{cases} \quad K_{ro}(S_w) = \begin{cases} 0, & S_w \geq 1 - S_{or}, \\ (1 - S)^2, & 0 \leq S_w \leq 1 - S_{or}, \end{cases} \quad (3)$$

onde  $S = (1 - S_w - S_{or})/(1 - S_{wc} - S_{or})$ ,  $S_{wc}$  e  $S_{or}$  são a saturação de água conata e a saturação do óleo residual, respectivamente, e são dadas na Tabela 1. O meio poroso é considerado saturado, i.e.  $S_w + S_o = 1$ . Consideramos o Sistema (1) com a seguinte condição inicial

Tabela 1: Valores constantes para os parâmetros.

Símbolo	Descrição	Valor	Fonte
$S_{wc}$	Saturação de água conata	0.0	[2]
$S_{or}$	Saturação de óleo residual	0.15	[2]
$\mu_w$	Viscosidade da fase água	1	[2]
$\mu_o$	Viscosidade da fase óleo	2	[2]
$S_w^+$	Saturação de água no ponto inicial	0.75	
$f_w(S_w^+)$	Fluxo fracionário avaliado em $S_w^+$	0.9911894273	Eq.(2)

$$S_w(x, 0) = \begin{cases} S_w^-, & x < 0, \\ S_w^+, & x > 0, \end{cases} \quad e \quad C_{so}(x, 0) = \begin{cases} C_{so}^-, & x < 0, \\ C_{so}^+, & x > 0, \end{cases} \quad (4)$$

onde  $U^- = (S_w^-, C_{so}^-)$  é o estado menos e  $U^+ = (S_w^+, C_{so}^+)$  é o estado mais. Optamos por estudar os choques que têm perfil viscoso, portanto, são adicionados termos de viscosidade ao Sistema (1):

$$\partial_t S_w + \partial_x f_w = \epsilon \partial_{xx} S_w, \quad \partial_t (C_{so} S_o) + \partial_x (C_{so} f_o) = \epsilon \partial_{xx} C_{so}, \quad (5)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante não nula. Isto permite encontrar a solução na forma de ondas viajantes do sistema associado, trocando as variáveis de  $(x, t)$  para coordenadas viajantes  $(\xi = x - vt, t)$ , onde  $v$  representa a velocidade da onda viajante. O sistema original de equações diferenciais parciais (EDPs) pode ser reescrito como um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs), similar ao que foi feito em [5]. Além disso, os estados menos e mais correspondem aos seguintes pontos de equilíbrio esquerdo e direito:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U^-, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U^+. \quad (6)$$

Ao fazer a mudança de variáveis para coordenadas viajantes obtém-se o sistema de EDOs

$$\begin{cases} d_\xi S_w = \epsilon^{-1} (f_w - f_w^+ - v(S_w - S_w^+)) = F_1(S_w, C_{so}), \\ d_\xi C_{so} = \epsilon^{-1} ((1 - f_w)C_{so} - (1 - f_w^+)C_{so}^+ - v((1 - S_w)C_{so} - (1 - S_w^+)C_{so}^+)) = F_2(S_w, C_{so}). \end{cases} \quad (7)$$

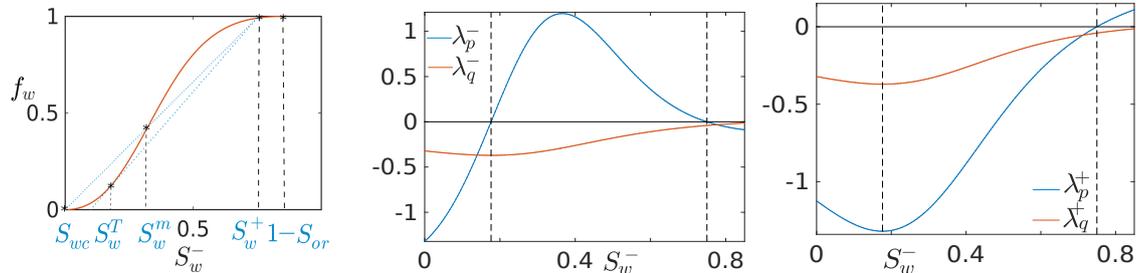
## 2.1 Localização dos pontos de equilíbrio

Provar que o Problema de Riemann (1), (4) tem solução na forma de ondas viajante significa provar que o Sistema (7) tem uma órbita que liga o equilíbrio esquerdo ao direito. Para localizar os equilíbrios de (7) estudaremos os zeros do campo vetorial associado:

$$d_\xi S_w = 0, \quad d_\xi C_{so} = 0, \quad \text{onde } v = (f_w^+ - f_w^-)/(S_w^+ - S_w^-). \quad (8)$$

Observa-se que para cada  $S_w^-$  tem-se um valor diferente para  $v$ . Usando os valores dados na Tabela 1, pode ser obtido a curva de nível de  $F_2(S_w, C_{so}) = 0$  concluindo o seguinte:

- Os pontos de equilíbrio  $(S_w, C_{so})$  encontram-se sobre uma reta horizontal.
- As segundas componentes dos pontos de equilíbrio devem ser iguais a 1, i.e.  $C_{so} = 1$ .



(a) Fluxo fracionário da água (vermelha) intersectado por duas retas pontilhadas (celeste). (b) Autofunções associadas a  $(S_w^-, C_{so}^-)$ . (c) Autofunções associadas a  $(S_w^+, C_{so}^+)$ .

Figura 2.1: Equilíbrios de (7), com  $S_w^+ = 0.75$ . (a) Os pontos  $(S_w^T, f_w(S_w^T))$  e  $(S_w^m, f_w(S_w^m))$  são as interseções entre  $f_w$  e a tangente a  $f_w$  que passa por  $(S_w^+, f_w^+)$  e a reta que liga  $(S_{wc}, f_w(S_{wc}))$  e  $(S_w^+, f_w^+)$ . (b) e (c) Classificação dos pontos de equilíbrio.

Para ter informação sobre  $S_w$  consideramos  $F_1(S_w, C_{so}) = 0$ , como  $\epsilon \neq 0$  obtém-se:

$$f_w = vS_w + (f_w^+ - vS_w^+). \tag{9}$$

Esta equação representa os pontos de interseção de uma reta de inclinação  $v$  com a curva de fluxo fracionário da água nos pontos  $(S_w^+, f_w^+)$  e  $(S_w, f_w)$ , veja Fig. 2.1(a). Na Fig. 2.1(a) mostra-se, que dependendo do valor de  $S_w$  tem-se dois ou três pontos de interseção.

## 2.2 Número de pontos de equilíbrio

Para identificar os possíveis equilíbrios estudaremos a primeira componente do campo (8). Na Eq. (9), a reta  $y = vS_w + (f_w^+ - vS_w^+)$  tem uma inclinação  $v$  que depende de  $S_w^-$ , veja (8). A variação de  $v$  cria um leque de retas que intersectam a função do fluxo fracionário da água. Por exemplo, na Fig. 2.1(a) tem-se duas retas pontilhadas (cor celeste) que intersectam  $f_w$ . Uma tem inclinação  $(f_w(S_w^+) - f_w(S_w^T))/(S_w^+ - S_w^T)$  e é tangente à curva de fluxo fracionário da água no ponto  $S_w^T$ . A outra passa pela origem e por  $(S_w^+, f_w(S_w^+))$ , intersectando a curva  $f_w$  em 3 pontos:  $(S_{wc}, f_w(S_{wc}))$ ,  $(S_w^m, f_w(S_w^m))$ ,  $(S_w^+, f_w(S_w^+))$ . O valor de  $S_w^T$  é calculado com a seguinte equação:

$$f_w'(S_w^T) = (f_w(S_w^+) - f_w(S_w^T))/(S_w^+ - S_w^T). \tag{10}$$

Entretanto, o valor de  $S_w^m$  obtém-se calculando  $f_w(S_w^m) = \theta_2 S_w^m$ , onde  $\theta_2$  é a inclinação da reta que passa pela origem e pelo ponto  $(S_w^+, f_w^+)$ , veja Fig. 2.1(a). Com o estudo geométrico feito na Fig. 2.1(a) é demonstrada a Proposição 2.1.

**Proposição 2.1.** *A reta  $y = vS_w + (f_w^+ - vS_w^+)$  da Eq. (9) pode intersectar a curva do fluxo fracionário da água em dois ou três pontos, obtendo o número de equilíbrios.*

- Se  $S_w^- \in ]S_w^+, 1 - S_{or}]$ , existem dois equilíbrios:  $(S_w^-, C_{so}^-)$  e  $(S_w^+, C_{so}^+)$ .
- Se  $S_w^- \in ]S_w^m, S_w^+]$ , existem dois equilíbrios:  $(S_w^-, C_{so}^-)$  e  $(S_w^+, C_{so}^+)$ .
- Se  $S_w^- \in [S_w^T, S_w^m]$  existem três equilíbrios:  $(S_w^e, C_{so}^e)$ ,  $(S_w^-, C_{so}^-)$ ,  $(S_w^+, C_{so}^+)$ , tal que  $S_w^e < S_w^- < S_w^+$  e  $S_w^e \in [S_{wc}, S_w^T]$ .

- Se  $S_w^- \in [S_{wc}, S_w^T[$  existem três equilíbrios:  $(S_w^-, C_{so}^-)$ ,  $(S_w^e, C_{so}^e)$ ,  $(S_w^+, C_{so}^+)$ , tal que  $S_w^- < S_w^e < S_w^+$  e  $S_w^e \in ]S_w^T, S_w^m]$ .

**Observação 2.1.** A Proposição 2.1 vale para toda função de fluxo fracionário em forma de  $S$ .

### 2.3 Classificação dos pontos de equilíbrio

Na seção anterior determinamos o número de equilíbrios que tem o Sistema (7) dependendo da posição de  $S_w^-$ . Nesta seção, os classificamos nas vizinhanças correspondentes com base no Teorema de Hartman-Grobman. Considere o Sistema (7) linearizado  $U' = J(U_0)U$ , onde  $U = (S_w, C_{so})^T$  e  $J(U_0)$  é a matriz jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio  $U_0 = (S_{w_0}, C_{so_0})$ . Calculamos os autovalores obtendo as raízes de  $\det(J(U) - \lambda I) = 0$ :

$$\lambda_p = \epsilon^{-1} (f'_w(S_w) - v) \text{ e } \lambda_q = \epsilon^{-1} (-v(1 - S_w) + 1 - f_w), \quad (11)$$

com seus correspondentes autovetores:

$$\omega_p = [a \ 1], \omega_q = [0 \ 1], \text{ onde, } a = \epsilon(\lambda_q - \lambda_p) / (-C_{so}\lambda_p). \quad (12)$$

No que segue os super-índices  $(-)$  e  $(+)$  denotam as autofunções associadas aos equilíbrios esquerdo e direito, respectivamente. As autofunções são definidas como:

$$\begin{cases} \lambda_p^\mp = \lambda_p(S_w^\mp, C_{so}^\mp) = \epsilon^{-1} (f'_w(S_w^\mp) - v), \\ \lambda_q^\mp = \lambda_q(S_w^\mp, C_{so}^\mp) = \epsilon^{-1} (1 - f_w(S_w^\mp) - v(1 - S_w^\mp)). \end{cases} \quad (13)$$

Com os valores da Tabela 1 obtemos os gráficos das autofunções definidas em (13), veja as Figs. 2.1(b) e 2.1(b). Estas gráficas representam a classificação dos autovalores associados aos equilíbrios esquerdo e direito. Observando a mudança de sinal nestas figuras é demonstrado Teorema 2.1.

**Observação 2.2.** Ao calcular  $\lambda_p^\mp = 0$  e  $\lambda_q^\mp = 0$ ,  $\epsilon$  não influencia no sinal das autofunções.

**Teorema 2.1.** Seja o Sistema de EDOs (7) com  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$  e as autofunções  $(\lambda_p^\mp, \lambda_q^\mp)$  descritas em (13). Com  $S_w^T$  dado em (10), os equilíbrios são classificados como segue:

- Se  $S_w^- \in [S_{wc}, S_w^T[$ , têm-se três equilíbrios: o esquerdo e direito são atratores hiperbólicos e o extra é uma sela hiperbólica (não há possibilidade de conexão).
- $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^m]$ , têm-se três equilíbrios: o esquerdo é uma sela hiperbólica, o direito é um atrator hiperbólico e o extra é um atrator hiperbólico.
- $S_w^- \in ]S_w^m, S_w^+[$ , têm-se dois equilíbrios: o esquerdo é uma sela hiperbólica e o direito é um atrator hiperbólico.
- Se  $S_w^- \in ]S_w^+, 1 - S_{or}[$ , têm-se dois equilíbrios: o esquerdo é um atrator hiperbólico e o direito é uma sela hiperbólica (não há possibilidade de conexão).

**Teorema 2.2.** Seja o Sistema (7) com  $v$  definido em (8),  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$ ,  $C_{so}^- = 1$  e  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+[$ , onde  $S_w^T$  é como em (10). Com os valores da Tabela 1, existe a solução deste sistema  $(S_w(\xi), C_{so}(\xi))$ , tal que  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (S_w(\xi), C_{so}(\xi)) = (S_w^-, 1)$  e  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} (S_w(\xi), C_{so}(\xi)) = (0.75, 1)$ .

*Demonstração.* Se  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+[$  tem-se duas possibilidades: ou  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^m]$ , ou  $S_w^- \in ]S_w^m, S_w^+[$ , veja Fig. 2.2(a).

a) Se  $S_w^- \in ]S_w^m, S_w^+[$ , pelo Teor. 2.1 só existem dois equilíbrios: o esquerdo ( $L$ ) uma sela hiperbólica e o direito ( $R$ ) um atrator hiperbólico.

Como  $L$  é uma sela hiperbólica,  $L$  tem duas variedades invariantes. A reta amarela vertical que passa pelo equilíbrio  $R$  é uma variedade invariante, veja Fig. 2.2(b). Portanto, as retas verticais

passando pelos pontos  $L$  e  $R$  são variedades invariantes. Isto implica que a região entre elas  $\Omega = \{(S_w, C_{so}) : S_w^- < S_w < S_w^+\}$  é um conjunto invariante pelo Sistema (7).

Suponhamos, por absurdo, que não exista uma órbita que ligue  $L$  a  $R$  como no enunciado do teorema. Parte da variedade instável de  $L$  fica à direita de  $L$  como indicado em verde na Fig. 2.2(b). Esta variedade, que chamamos  $U^u(L)$ , é uma órbita do Sistema (7). Sem perda de generalidade suponhamos que esta órbita cresce na direção positiva de  $C_{so}$  quando varia  $\xi$ , veja Fig. 2.2(b). Para todos os pontos  $(S_w^+, C_{so})$  com  $C_{so}$  positivo, podemos traçar o menor segmento de reta horizontal que junta  $U^u(L)$  à reta  $S_w = S_w^+$ . Note que o campo vertical no extremo esquerdo deste segmento é positivo, enquanto que no extremo direito é negativo. Pelo Teorema de Valor Médio, existe ao menos um ponto neste segmento horizontal tal que o campo vertical nele é nulo. Com isso mostramos que o conjunto de todos os pontos da região  $\Omega$  com os pontos onde o campo vertical é nulo não é limitado na direção positiva de  $C_{so}$ .

Por outro lado, o conjunto de todos os pontos da região  $\Omega$  com os pontos onde o campo vertical é nulo coincide com o conjunto de todos os zeros de  $F_2(S_w, C_{so})$ . Considerando os valores dados na Tabela 1, substituindo (2) (com (3)) em  $F_2(S_w, C_{so}) = 0$  obtém-se:

$$F_2(S_w, C_{so}) = (C_{so}(a_1 S_w^2 + a_2 S_w + a_3 + a_4 S_w^3) + a_5 S_w^2 + a_6 S_w + a_7) / (a_8 S_w^2 + a_9 S_w + a_{10}), \quad (14)$$

onde  $a_i, \forall i = 1, \dots, 10$  são constantes e é uma função racional com denominador não nulo para  $S_w \in [S_{wc}, 1 - S_{or}]$ , que em particular se satisfaz para  $S_w \in ]S_w^m, S_w^+]$ . Da Eq. (14) tem-se

$$C_{so}(S_w) = -(b_1 S_w^2 - b_2 S_w + b_3) / (b_4 S_w^3 - b_5 S_w^2 + b_6 S_w - b_7), \quad (15)$$

onde  $b_i, \forall i = 1, \dots, 7$  são constantes e o denominador é não nulo para  $S_w \in \Omega$ . A função  $C_{so}(S_w)$  representa a curva de nível  $c_2$  de  $F_2(S_w, C_{so}) = 0$ . O gráfico  $c_2$  é uma curva limitada, dado que  $c_2$  é contínua definida num intervalo compacto. Isto é uma contradição, pois tínhamos construído um subconjunto ilimitado de  $c_2$ . Portanto, existe a órbita que liga  $L$  a  $R$ .

b) Se  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^m]$ , pelo Teor. 2.1 tem-se três equilíbrios: o esquerdo ( $L$ ) é uma sela hiperbólica, o direito ( $R$ ) é um atrator hiperbólico e o extra ( $E$ ) é um atrator hiperbólico. Também sabemos que se satisfaz a seguinte relação de ordem  $S_w^e < S_w^T < S_w^- < S_w^+$ .

Dado que a variedade estável de  $L$  é uma reta vertical (veja reta vermelha na Fig. 2.2(b)) que divide o retrato de fase em duas regiões: à esquerda e à direita dessa reta. O equilíbrio extra fica na região à esquerda da reta. Como esta reta é uma variedade estável logo, como as órbitas formam uma partição do espaço de fase, nenhuma órbita passa pelas duas regiões. Portanto o equilíbrio extra não influencia no estudo da existência de órbita conectando  $L$  a  $R$ . Logo pela parte a) garantimos a existência da órbita heteroclínica conectando  $L$  a  $R$ .  $\square$

Na Fig. 2.2(a), as regiões  $I, II$  e  $III$  mostram onde pode existir (azul) ou não existe solução (vermelha) na forma de ondas viajantes para o Sistema EDPs (1) considerando  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$ . Enquanto, na Fig. 2.2(b) as retas vermelha e amarela indicam as variedades invariantes de  $L$  e  $R$ , respectivamente. Estamos supondo que a variedade instável de  $L$  (cor verde) explode na direção positiva de  $C_{so}$ . Os pontos asteriscos indicam o conjunto solução da Eq. (10).

**Corolário 2.1.** *Seja o Sistema (7) com  $v$  definido em (8),  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$ ,  $C_{so}^- = 1$ ,  $S_w^- \notin ]S_w^T, S_w^+]$  e  $S_w^T$  como em (10). Com os valores da Tabela 1, não existe a solução  $(S_w(\xi), C_{so}(\xi))$  do Sistema (7) tal que  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (S_w(\xi), C_{so}(\xi)) = (S_w^-, 1)$  e  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} (S_w(\xi), C_{so}(\xi)) = (0.75, 1)$ .*

**Teorema 2.3.** *Seja o Sistema de EDPs (1) com condições iniciais*

$$U^- = (S_w^-, 1), \quad x < 0 \quad \text{e} \quad U^+ = (0.75, 1), \quad x > 0. \quad (16)$$

*Com os valores de parâmetros dados na Tabela 1, existe solução na forma de ondas viajantes para o Problema de Riemann (1), (16), se e somente se,  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+]$  e  $S_w^T$  é como (10).*

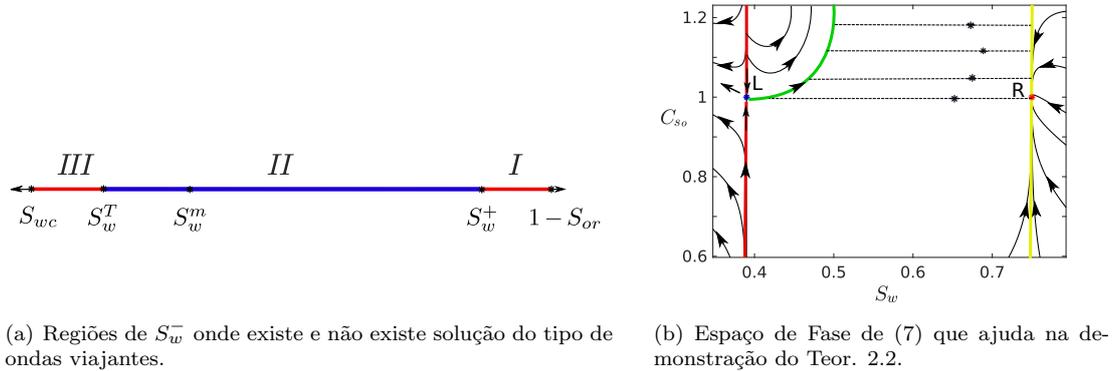


Figura 2.2: À direita Regiões de  $S_w^-$ . À esquerda espaço de fase obtido ao supor que não existe uma órbita heteroclínica que liga  $L$  a  $R$ .

**Observação 2.3.** O Corolário 2.1 e Teorema 2.3 são demonstrados usando os Teoremas 2.1 e 2.2.

Para  $\epsilon = 1$ , na Fig. 2.3(a) mostramos a órbita que liga o equilíbrio esquerdo ao direito e os perfis do Sistema de EDOs (7) são mostrados na Fig. 2.3(b). Os resultados obtidos nesta seção não são influenciados pelo valor de  $\epsilon$ , mas quando  $\epsilon \rightarrow 0$  obtém-se simulações similares.

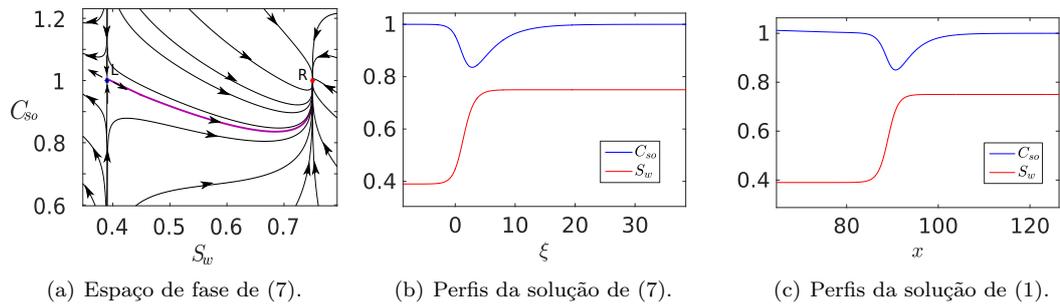


Figura 2.3: Foi considerado  $\epsilon = 1$  e  $U^- = (0.39, 1)$ . Nas Figs. (a) e (b) foi usado MATLAB e na Fig. (c) foi usado RCD.

### 3 Ondas de rarefação y Ondas compostas

Nesta seção verificamos numericamente que o Sistema (1) tem solução na forma de ondas de rarefação e na forma de ondas compostas, para  $S_w^-$  que pertence á região  $I$  e  $III$ , respectivamente, veja Fig. 2.2(a). Supondo que  $U$  é uma função diferenciável de  $\xi = x/t$ , o Sistema (1) pode ser reescrito como:

$$U'(\xi) = B, \text{ com } U'(\xi) = [S_w' C_{so}']^T, \quad B = [1/f_w''(S_w) \ 0]^T. \quad (17)$$

A solução do Sistema (17) é mostrada nas Figs. 3.1(a) e 3.1(b), onde verificamos numericamente que para  $S_w^- \in ]S_w^+, 1 - S_{or}]$  o Problema de Riemann (1), (16) tem solução por onda de rarefação. Nestas figuras observamos que temos uma onda de rarefação conectando  $(S_w^-, C_{so}^-)$  com  $(S_w^+, C_{so}^+)$ .

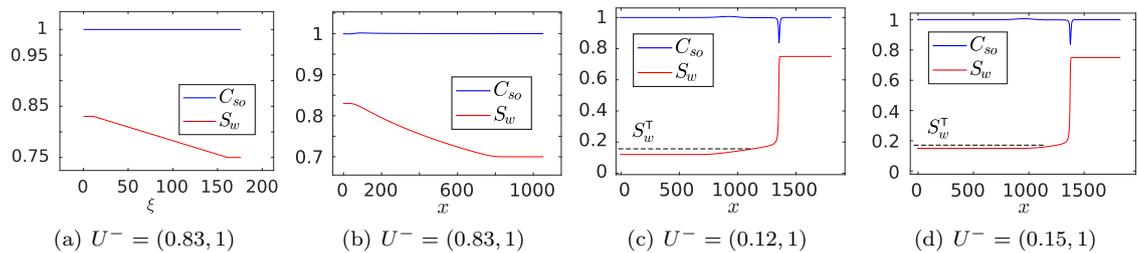


Figura 3.1: Soluções do Sistema (1) com  $U^+ = (0.75, 1)$ : (a)-(b) solução por ondas de rarefação e (c)-(d) solução por ondas compostas. Nas figuras (a) e (c) foi usado MATLAB, e em (b) e (d) foi usado RCD.

Com  $U^+ = (0.75, 1)$  foi verificado que para  $S_w^- = S_w^T$ ,  $C_{so}^- = 1$  o estado  $U^-$  satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot e satisfaz que a velocidade da característica  $\lambda_1(U^-)$  coincide com a velocidade de choque, veja Eq. (10). Neste caso dizemos que o choque é característico à esquerda e a solução do problema de Riemann consiste em um grupo de duas ondas sem estado intermediário constante entre elas. Tal grupo de ondas é chamada na literatura de “ondas compostas” [6]. Para  $S_w^- \in [S_{wc}, S_w^T[$ , temos uma solução composta. Como exemplo, consideramos  $U^- = (0.12, 1)$  e  $U^+ = (0.75, 1)$ . A solução do Problema de Riemann (1), (16) consiste de um grupo de duas ondas com um estado intermediário entre elas: primeiro tem-se uma onda de rarefação conectando  $(S_w^-, C_{so}^-)$  com  $(S_w^T, 1)$  seguido de um choque característico à esquerda que conecta  $(S_w^T, 1)$  a  $(S_w^+, C_{so}^+)$ , ver Fig. 3.1(c). Similar resultado é mostrado na Fig. 3.1(d), com  $U^- = (0.15, 1)$  e  $U^+ = (0.75, 1)$ .

## 4 Conclusões

Consideramos o modelo que descreve o deslocamento de óleo com ajuda de um solvente miscível na fase aquosa imiscível. O principal objetivo foi determinar a existência da solução na forma de ondas viajantes do problema de Riemann. Além disso, mostramos numericamente as soluções do problema de Riemann para alguns exemplos.

## Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG). Também agradecemos ao Prof. Dr. Aparecido J. de Souza por suas contribuições ao concluir este trabalho.

## Referências

- [1] Lake, L. Enhanced oil recovery. Old Tappan, NJ: Prentice Hall Inc., 1989.
- [2] Lake, L., Walsh, M. Applying fractional flow theory to solvent flooding and chase fluids. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 281–303, 1989.
- [3] Lambert, W., Alvarez, A., Ledoino, I., Tadeu, D., Marchesin, D. e Bruining, J. Mathematics and Numerics for Balance Partial Differential-Algebraic Equations (PDAEs). *JSComput*, 1–56, 2020.
- [4] LeVeque, R. Numerical methods for conservation laws. (Vol. 3.) Springer, Birkhuser, 1992.
- [5] Lozano, L., F, Zavala, R., Q. e Chapiro, G. Mathematical properties of the foam flow in porous media. *Computational Geosciences*, (Vol. 25), 515–527, 2021.
- [6] Matos, V., Azevedo, A.,V., Da Mota, J., C. e Marchesin, D. Bifurcation under parameter change of Riemann solutions for nonstrictlyhyperbolic systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* (Vol. 66) 1413–1452, 2015.