

# Simulação computacional para o problema de dispersão de poluição na lagoa Rodrigo de Freitas

João Paulo Alves Barros<sup>1</sup>

UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Cristiane Oliveira de Faria<sup>2</sup>

IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

João Frederico da Costa Azevedo Meyer<sup>3</sup>

IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

**Resumo.** Como sabemos, um dos maiores problemas do século 21 é a poluição. Neste trabalho apresentamos uma investigação sobre o processo de dispersão da poluição na Lagoa Rodrigo de Freitas e suas conseqüências. Para analisar o processo de poluição, uma proposta de modelagem numérica através da equação difusão-advecção-reação foi considerada. Simulações numéricas são mostradas considerando o Método dos Elementos Finitos para as discretizações espaciais (usando elementos triangulares lineares) combinadas ao método de Crank-Nicolson para que a discretização de tempo seja mostrada. As simulações computacionais foram realizadas monitorando o processo de dispersão de poluição ao longo de 3 dias em 3 cenários diferentes, e além disso, foi realizada uma análise da concentração de poluição em nós específicos ao longo do tempo.

**Palavras-chave.** Problema de transporte, Concentração de poluentes, Método de Elementos Finitos, Método Crank-Nicolson.

## 1 Introdução

A poluição ambiental é um dos maiores problemas deste século e um dos principais fatores que influenciam é o rápido crescimento industrial em escala global aliado à emissão de poluentes. A influência da poluição ocorre de diversas formas como: efeito estufa, alteração em taxas de mortalidades e natalidades de algumas espécies, destruição da camada de ozônio, chuvas ácidas, toxicidade. Todos os fatores citados prejudicam não só a vida do planeta como também a longevidade humana.

Neste trabalho, apresentamos simulações computacionais para o processo de dispersão da poluição da Lagoa Rodrigo de Freitas por efluentes utilizando método de Galerkin combinado com o método de Crank-Nicolson para discretização espacial e temporal, respectivamente. A área da lagoa Rodrigo de Freitas é aproximadamente de 2,2 km<sup>2</sup> e se encontra na zona sul da cidade do Rio de Janeiro. Ela é carinhosamente apelidada de “*Coração do Rio de Janeiro*” devido ao seu formato parecer um coração (veja a Figura 1).

A lagoa é considerada como um dos principais pontos turísticos da cidade do Rio de Janeiro. Em seu entorno encontram-se parques e áreas de lazer para a população. No entanto, é de notório saber que a lagoa se encontra poluída e num estágio em que se banhar nela chega a ser um grave perigo contra a saúde. Desde 2006, a Companhia Estadual de Águas e Esgotos do Rio de Janeiro

---

<sup>1</sup>jpab\_7@hotmail.com

<sup>2</sup>cofaria@ime.uerj.br

<sup>3</sup>joni@ime.unicamp.br

(CEDAE) vem realizando estratégias para conter a poluição da lagoa. Houve inúmeras intervenções com o objetivo de proporcionar melhorias nos sistemas de esgotos sanitários de todas as sub-bacias contribuintes para a Lagoa e com isso iniciar uma recuperação ambiental, já verificada pelos órgãos de fiscalização ambiental do estado.

No entanto, o problema da poluição em lagoas não é um caso particular da Lagoa Rodrigo de Freitas. Em Wolmuth [7] estudos foram feitos para o caso de poluição da represa do Rio Manso, em Prestes [6] para o caso da lagoa do Taquaral, Campinas-SP. Baseado nestes trabalhos e na metodologia proposta em [5], apresentamos simulações computacionais utilizando a mesma metodologia desenvolvida no caso da represa do Rio Manso.



Figura 1: Lagoa Rodrigo De Freitas. Fonte: Jornal O Globo (2019)

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 será apresentado o modelo matemático de dispersão de poluição para este tipo de problema com as hipóteses que serão consideradas. Na Seção 3 serão propostos os métodos numéricos para este estudo. Será utilizado na discretização para a variável espacial o método de Galerkin com elementos triangulares lineares e para a variável temporal o método de Crank-Nicolson. Também serão apresentados os testes realizados e resultados computacionais para o problema da lagoa considerando um domínio retangular e da Lagoa Rodrigo de Freitas. Por fim, serão apresentadas as conclusões.

## 2 Problema Modelo

O problema de tratamento e dispersão da poluição será modelado pela equação do transporte com difusão-advecção-reação. O objetivo é encontrar a concentração do poluente  $c(t, x, y)$ , onde  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $t \in I = [0, T]$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} - \epsilon \Delta c + \beta \cdot \nabla c + \delta c = f & \text{em } \Omega, \\ -\epsilon \frac{\partial c}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

O parâmetro  $\epsilon$  é a constante de difusibilidade,  $\beta = (u, w)$  é a velocidade da superfície da água,  $\delta$  é definida como a taxa de decaimento no meio aquático e  $f$  é o termo fonte, que pode ser uma ou várias fontes de poluição ou sumidouros, pontuais ou não.

A condição de fronteira está atrelada ao fato da lagoa perder poluentes em suas bordas  $\Gamma$ . Neste estudo consideraremos apenas o caso de um agregado, o concreto, que foi utilizado para revestir a borda de toda a lagoa levando que a perda de poluente na borda é igual a zero.

### 3 Discretização do Problema

O mapeamento geométrico da região da Lagoa Rodrigo de Freitas foi feita utilizando o software *Google Earth*<sup>®</sup>. Foram obtidas as coordenadas necessárias para a fronteira aproximada da original através de segmentos de retas. Com o auxílio do software livre *GMSH*<sup>4</sup>, foi gerada uma malha considerando elementos triangulares (veja Figura 2).

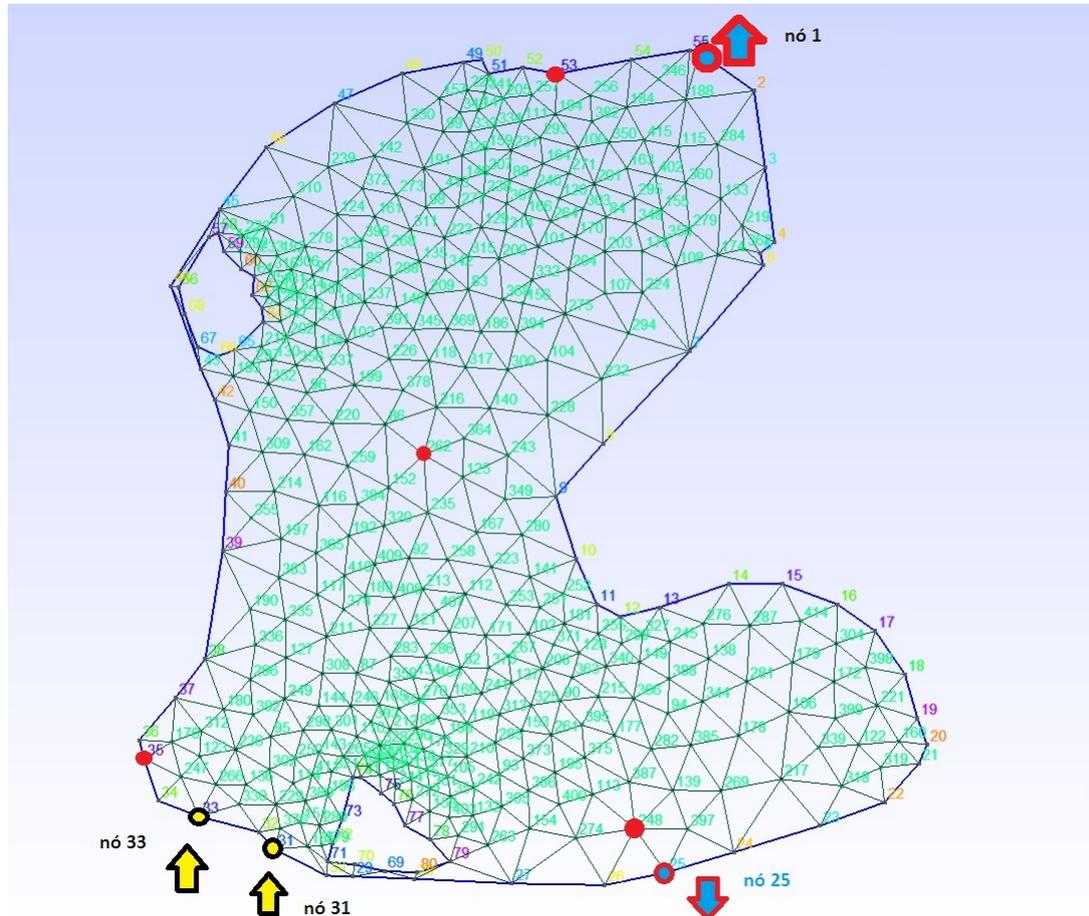


Figura 2: Malha gerada utilizando o *GMSH*.

A malha gerada pelo *GMSH* aproxima a Lagoa Rodrigo de Freitas com 519 elementos triangulares de ordem linear (P1) e 415 nós. Na Figura 2 também seguem destacados em vermelho os nós que serão utilizados para análise de concentração de poluição, as flechas azuis são os nós onde ocorre saída de poluente e as flechas em amarelo são os nós que são fonte de poluição. Todos serão explicitados para cada estudo de caso na Tabela 4.

Dado  $H_h$ , um subespaço vetorial de  $H^1(\Omega)$ , de dimensão finita  $N$ , define-se a base  $K = \{\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \dots, \phi_N(x, y)\}$ .

Sendo assim, queremos encontrar  $c_h \in H_h$  tal que:

$$\left( \frac{\partial c_h}{\partial t}, v_h \right) + \epsilon(\nabla c_h, \nabla v_h) + (\beta \cdot \nabla c_h, v_h) + (\delta c_h, v_h) = (f, v_h) \quad , \forall v_h \in V_h. \quad (2)$$

<sup>4</sup>Disponível em: <<http://gmsh.info/>>. Acesso em 3 dez. 2019.

Aplicando o Método de Crank-Nicolson como em (ver [7]), obtemos o seguinte sistema linear o passo de tempo  $n + 1$ :

$$Ac^{n+1} = Bc^n + d \tag{3}$$

onde:

- $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], d = [d_i],$
- $a_{ij} = \left[ (1 + \frac{\delta \Delta t}{2})(\phi_j, \phi_i) + \frac{\epsilon \Delta t}{2}(\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) + \frac{u \Delta t}{2}(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i) + \frac{w \Delta t}{2}(\frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i) \right],$
- $b_{ij} = \left[ (1 - \frac{\delta \Delta t}{2})(\phi_j, \phi_i) - \frac{\epsilon \Delta t}{2}(\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) - \frac{u \Delta t}{2}(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i) - \frac{w \Delta t}{2}(\frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i) \right],$
- $d_i = \Delta t(f, \phi_i).$

em que  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são os espaçamentos da malha na horizontal e na vertical, respectivamente e  $\Delta t$  o espaçamento correspondente à malha temporal. O sistema acima será resolvido iterativamente no tempo, a partir da condição inicial  $c_0$ , previamente fornecida.

## 4 Simulação computacional

Nesta seção apresentamos simulações feitas para alguns casos propostos de dispersão de poluição na lagoa. Na Tabela 2, coletamos os valores dos parâmetros e constantes utilizados nos testes. É importante ressaltar que os valores da constante de difusibilidade, da velocidade do vento, do decaimento e da condição de fronteira utilizados ao longo deste estudo foram retirados de Wolmuth [7] e Prestes [6]. Na Tabela 1, para cada caso é mostrado a numeração dos nós utilizados como saída de poluentes ou fonte de poluição e cada caso monitora o processo de poluição ao longo de 3 dias da lagoa. A localização destes pode ser vista na Figura 2.

Tabela 1: Localização dos nós utilizados como saída de poluentes ou fonte de poluição.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Fontes de Poluição	31	31 e 33	31 e 33
Sumidouros	25	25	1 e 25

Tabela 2: Valores dos parâmetros utilizados nos testes.

$\epsilon$	0.4 km <sup>2</sup> /h	Velocidade	1.9 km/h
$w$	0.00360 km/h	Número de Dias	3
$u$	0.00360 km/h	$N_e$	751
$\delta$	10 <sup>-10</sup> h <sup>-1</sup>	nós	415
$C_0$	0.14	Tempo Final	72 h
$\Delta t$	0.024 h	Passos de tempo	1000
Fontes de Poluição	0.14 kg/h	Sumidouros	-0.10 kg/h

Na Figura 3, apresentamos as simulações dos três cenários descritos para a dispersão da concentração de poluentes na lagoa ao longo de 3 dias. Comparando o segundo caso, que teve um cenário com duas fontes de poluição e um sumidouro, com o primeiro caso que só possuía uma fonte e um sumidouro, podemos notar que a a concentração de poluentes na lagoa foi maior que no primeiro caso. A adição de mais uma fonte de poluição teve o efeito esperado. No terceiro caso, foi adicionado mais um sumidouro, a adição deste fez com que houvesse uma filtragem maior de

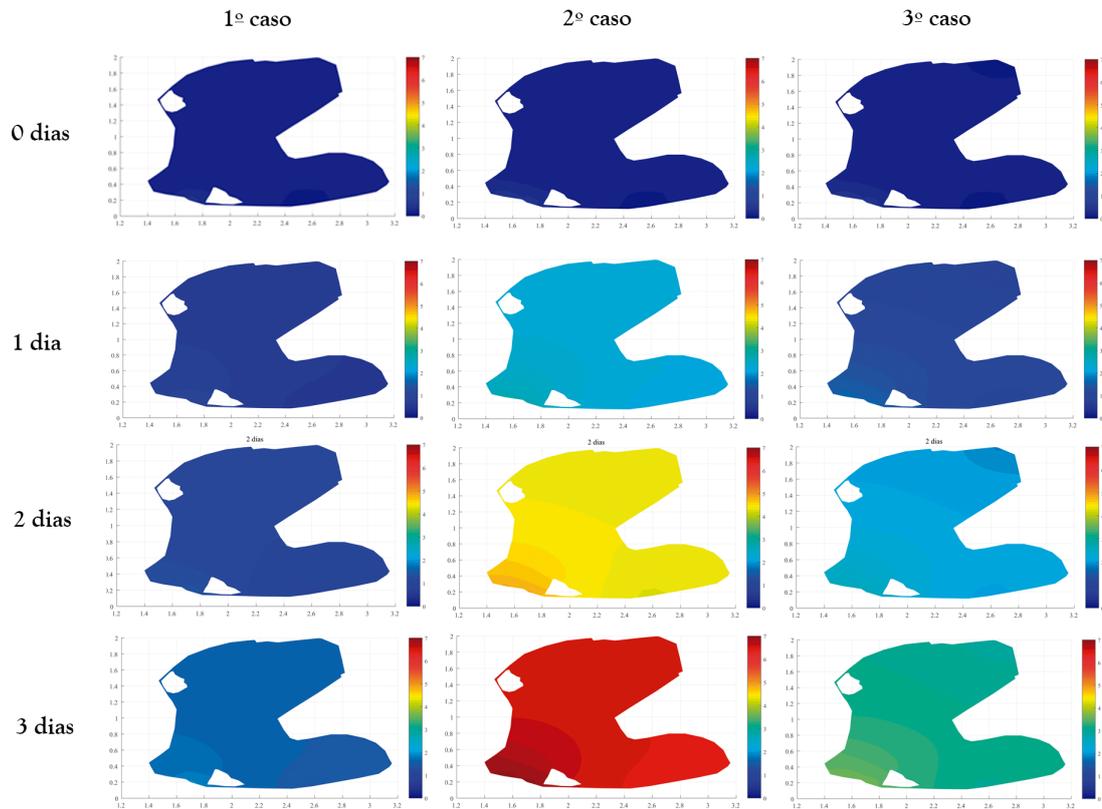


Figura 3: Casos de poluição na Lagoa Rodrigo de Freitas ao longo de 3 dias: (a)1º caso, (b)2º caso e (c) 3º caso.

poluente fazendo com que diminuisse a concentração total de poluentes da lagoa. Pode-se dizer que a concentração total caiu em aproximadamente 50% comparado ao segundo cenário.

Com o intuito de explorar melhor o problema e diferentemente das primeiras simulações que visavam apenas analisar a lagoa e sua concentração total, nesta segunda abordagem será analisada a concentração, dos nós 1, 262, 25 e 248 ao longo de 3 dias em cada caso. Na Figura 4 pode-se observar a concentração dos nós utilizados nos testes realizados na lagoa. Pode-se observar que no segundo caso com duas fontes de poluição, uma a mais que o primeiro, e mantendo o mesmo sumidouro, ocorreu um aumento de concentração em cada nó, o que era esperado observando o teste anterior realizado. No terceiro caso, com a adição de um sumidouro, é possível observar que a concentração de poluição dos nós foi menor que no segundo caso, o que era esperado ocorrer se for observado a Figura 3. A palheta de cores da Figura 3 mostra que a lagoa teve cerca de 50% de queda de concentração de poluente e observando a Figura 4 vemos que os nós neste caso obtiveram praticamente a mesma queda na concentração.

Estudos analisando a Matriz Global do problema, análises de casos em que a condição de Péclet não é obedecida além de testes variando a quantidade de elementos podem ser vistos em [1].

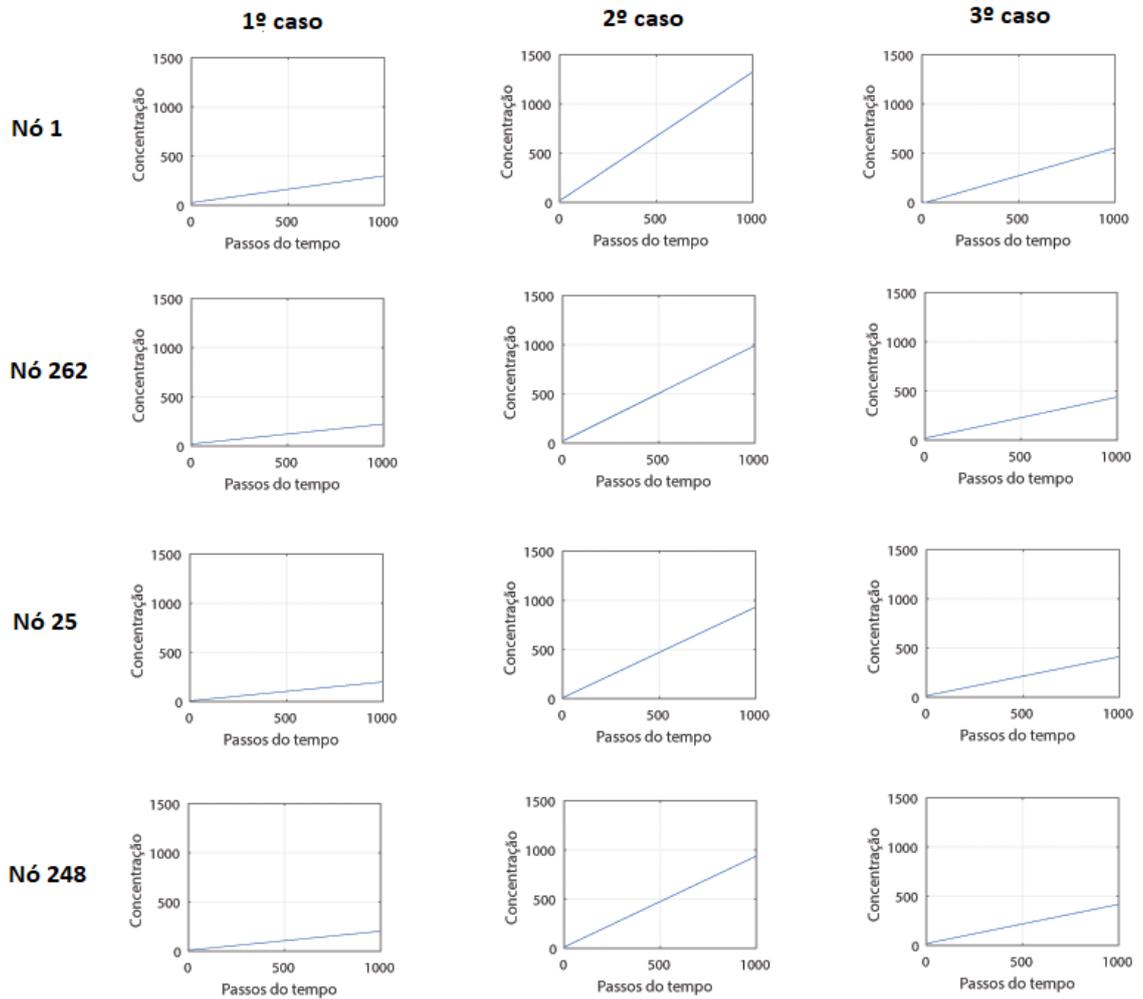


Figura 4: Concentração ao longo do tempo nos nós da Figura (a)1º caso, (b)2º caso e (c) 3º caso. 2.

## 5 Conclusões

É possível concluir que, à medida que se aumenta o número de fontes de poluições, a concentração de poluentes na lagoa aumenta. O inverso ocorre com a adição de sumidouros, aumentando-se o número de sumidouros, aumenta a filtragem de poluente e conseqüentemente diminui a concentração total de poluentes.

A utilização do *GMSH*, *Google Earth*<sup>®</sup> e de uma triangularização irregular nos deu uma melhor aproximação para a região de estudo. Sob este ponto de vista, é possível vislumbrar algumas abordagens para futuros projetos, no sentido de aprimorar o programa ou até mesmo o estudo com a possibilidade de trabalhar no  $\mathbb{R}^3$  como no caso do trabalho proposto por Diniz [5] ou utilizar Stokes para gerar a circulação da Lagoa.

O algoritmo utilizado é efetivo, assim sendo, pode ser utilizado para simular outras regiões, inserindo suas respectivas malhas, coordenadas dos nós e das fronteiras.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

- [1] Barros, J. P. A. Soluções numéricas para o problema de dispersão de poluição na Lagoa Rodrigo de Freitas, Dissertação de Mestrado, UERJ, 2019.
- [2] Charny, C. K. Mathematical models of bioheat transfer. *Advances in Heat Transfer - Bioengineering Heat Transfer*, 1992. DOI: 10.1016/S0065-2717(08)70344-7
- [3] Equer, D. B. Modelagem, aproximação e simulações computacionais de impacto ambiental com difusibilidade variável: um estudo de caso, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2017.
- [4] Krindges, A. Modelagem e simulação computacional de um problema tridimensional de difusão-advecção com o uso de Navier Stokes, Tese de Doutorado, Unicamp, 2006.
- [5] Meyer, J. F. C. A. and Diniz, G. L. Pollutant dispersion in wetland systems: Mathematical modelling and numerical simulation, *Ecological Modelling*, 2007. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2006.08.005.
- [6] Prestes, M. F. B. e Meyer, J. F. C. A. A influência da dispersão de material impactante em meio aquático na dinâmica populacional entre duas espécies de peixes: modelo matemático, aproximação numérica e simulação computacional - Lagoa do Taquaral - Campinas/SP. *Bio-matemática (Unicamp)*,24:65–76, 2014.
- [7] Wolmuth, D. L. Modelagem e simulações do comportamento evolutivo de poluentes em corpos aquáticos de grande extensão: O caso da represa do Rio Manso, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2009.