Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Um algoritmo inercial para funções DC em variedades de Hadamard

João Santos Andrade[1]
Departmento de Matemática, CCN/UFPI, Teresina, PI
CSHNB/UFPI, Picos, PI
Jurandir de Oliveira Lopes[2]
Departmento de Matemática, CCN/UFPI, Teresina, PI
João Carlos de Oliveira Souza[3]
Departmento de Matemática, CCN/UFPI, Teresina, PI

**Resumo**. Um algoritmo de ponto proximal inercial para funções DC é apresentado no contexto de variedades de Hadamard. Se a sequência gerada por nosso algoritmo é limitada, provaremos que cada ponto de acumulação é um ponto crítico da função objetivo.

**Palavras-chave**. Algoritmo de ponto proximal inercial, funções DC, Variedades de Hadamard.

## 1 Introdução

Nesse artigo, nosso interesse está focado no método do ponto proximal para encontrar uma solução (pontos críticos) de problemas de otimização envolvendo uma classe especial de funções não convexas que podem ser escritas como a diferença de duas funções convexas em variedades Hadamard. Denotamos este problema por

$$\min_{x\in M} f(x), \quad \text{com} \quad f(x) = g(x) - h(x), \tag{1}$$

onde $g, h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções convexas continuamente diferenciáveis e

$$\inf_{x\in M} f(x) > -\infty. \tag{2}$$

A função objetivo $f$ é chamada de função DC, isto é, diferença de duas funções convexas. O interesse pela teoria das funções DC aumentou muito nos últimos anos. No cenário euclidiano, existem muitos trabalhos dedicados a teoria das funções DC em diferentes contextos, veja por exemplos [4, 6–8, 10, 14], e recentemente Souza e Oliveira [12] e Almeida et al. [2] propuseram algoritmos no contexto Riemanniano.

O objetivo deste artigo é apresentar um método do ponto proximal inercial para funções DC(IDCPPA) em variedade de Hadamard, o qual foi baseado na ideia do algoritmo apresentado e estudado por Oliveira e Tcheou [10].

O algoritmo IDCPPA generaliza o algoritmo DCPPA proposto por Souza e Oliveira [12](no caso em que as funções $g$ e $h$ são continuamente diferenciáveis) substituindo no **Passo 2** o $grad\ h(x^k)$ por $grad\ h(x^k) + \gamma_k exp_{x^k}^{-1} x^{k-1}$ com $\gamma_k \geq 0$.

[1]joaosa.mat@ufpi.edu.br.
[2]jurandir@ufpi.edu.br.
[3]joaocos.mat@ufpi.edu.br.

DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0488  © 2021 SBMAC

## 2 Preliminares

Ao longo deste artigo, $M$ denota uma variedade Riemanniana $n-$dimensional completa, simplesmente conexa de curvatura seccional não positiva(variedade de Hadamard), com a função distância $d : M \times M \to \mathbb{R}$. Os resultados preliminares e conceitos de geometria Riemanniana usados ao longo deste artigo podem ser encontrados em [11, 12, 15].

Seja $p \in M$ um ponto arbitrário, o espaço tangente de $M$ em $p$ é denotado por $T_pM$ e o fibrado tangente de $M$ é dado por $TM = \cup_{p\in M} T_pM$, que é naturalmente uma variedade. Para qualquer $x \in M$ podemos definir a inversa da aplicação exponencial $exp_x^{-1} : M \longrightarrow T_xM$ que é $C^\infty$. Como $d(x, x') = \|exp_{x'}^{-1}x\|$, a aplicação $\rho_{x'} : M \to \mathbb{R}$ definida por $\rho_{x'}(x) = \frac{1}{2}d^2(x, x')$ é $C^\infty$ e seu gradiente em $x$ é $grad\ \rho_{x'}(x) = -exp_{x'}^{-1}x$.

Lembre-se de que um triângulo geodésico $\triangle(p_1, p_2, p_3)$ de uma variedade Riemanniana é um conjunto que consiste em três pontos $p_1, p_2$ e $p_3$ chamados *vértices* e três geodésicas mínimas $\gamma_i : [0, l_i] \longrightarrow M$ ligando esses três pontos. O ângulo $\alpha_i := \angle(\gamma_i^{'}(0), -\gamma_{i-1}^{'}(l_{i-1}))$ é chamado *ângulo* interno do vértice correspondente.

**Teorema 2.1.** *(Teorema da Comparação para Triângulos) Seja $\triangle(p_1, p_2, p_3)$ um triângulo geodésico. Denote, para cada $i = 1, 2, 3,$ por $\gamma_i : [0, l_i] \longrightarrow M$ a geodésica ligando $p_i$ a $p_{i+1}$, e $l_i = L(\gamma_i)$ e $\alpha_i := \angle(\gamma_i^{'}(0), -\gamma_{i-1}^{'}(l_{i-1}))$. Então, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq \pi$,*

$$l_i^2 + l_{i+1}^2 - 2l_il_{i+1}\cos\alpha_{i+1} \leq l_{i-1}^2. \tag{3}$$

*Em termos de distância e a aplicação exponencial, a desigualdade (3) pode ser reescrita como*

$$d^2(p_i, p_{i+1}) + d^2(p_{i+1}, p_{i+2}) - 2\langle exp_{p_{i+1}}^{-1}p_i, exp_{P_{i+1}}^{-1}p_{i+2}\rangle \leq d^2(p_{i-1}, p_i),$$

*sendo $\langle exp_{p+1}^{-1}p_i, exp_{p+1}^{-1}p_{i+2}\rangle = d(p_{i+1}, p_i)d(p_{i+1}, p_{i+2})\cos\alpha_{i+1}$.*

Usando as propriedades do transporte paralelo e da aplicação exponencial, obtemos o seguinte lema que será usado com frequência nas próximas seções.

**Proposição 2.1.** *Seja $x_0 \in M$ e $\{x_n\} \subset M$ tal que $x_n \to x_0$. Então,*
*(i) Para todo $y \in M$, temos $exp_{x_n}^{-1}y \to exp_{x_0}^{-1}y$ e $exp_y^{-1}x_n \to exp_y^{-1}x_0$.*
*(ii) Se $\upsilon_n \in T_{x_n}M$ e $\upsilon_n \to \upsilon_0$, então $\upsilon_0 \in T_{x_0}M$.*
*(iii) Dados, $u_n, \upsilon_n \in T_{x_n}M$ e $u_0, \upsilon_0 \in T_{x_0}M$, se $u_n \to u_0$ e $\upsilon_n \to \upsilon_0$, então $\langle u_n, \upsilon_n\rangle \to \langle u_0, \upsilon_0\rangle$.*
*(iv) A função $F : M \longrightarrow TM$ definida por $F(x) = P_{x,x_0}u$ é contínua em $M$, $\forall x \in M, u \in T_{x_0}M$.*

Uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa se, para todo segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$, a composição $f \circ \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa, isto é,

$$(f \circ \gamma)((1-t)a + tb) \leq (1-t)(f \circ \gamma)(a) + t(f \circ \gamma)(b), \forall a, b \in \mathbb{R} \ e \ 0 \leq t \leq 1.$$

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função convexa. O subdiferencial de $f$ em $x$ é definida por

$$\partial f(x) = \{u \in T_xM; \langle u, exp_x^{-1}y\rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in M\}.$$

Em particular, se $f$ é diferenciável, então $\partial f(x) = \{grad\ f(x)\}$ para todo $x \in M$ e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, $f(exp_pv) \geq f(p) + \langle grad\ f(p), v\rangle$, $\forall p \in M$, $\forall v \in T_pM$ (ver por exemplo [3]).

**Proposição 2.2.** *Seja $\{x^k\}$ uma sequência limitada em $M$. Se a sequência $\{v^k\}$ é tal que $v^k \in \partial f(x^k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, então $\{v^k\}$ é também limitada.*

*Demonstração.* Ver [9, Lemma 3.6]. □

 © 2021 SBMAC

**Proposição 2.3.** *Seja $M$ uma variedade de Hadamard e seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, para todo $x \in M$, existe $s \in T_xM$ tal que $f(y) \geq f(x) + \langle s, exp_x^{-1}y \rangle$, $\forall y \in M$. Em outras palavras, o subdiferencial $\partial f(x)$ de $f$ em $x \in M$ não é vazio.*

*Demonstração.* Ver [5, Theorem 3.3]. □

**Proposição 2.4.** *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, então para todo $x \in M$ e $\lambda > 0$, existe um único ponto, denotado por $p_\lambda(x)$, tal que $f(p_\lambda(x)) + \dfrac{\lambda}{2} d^2(p_\lambda(x), x) = f_\lambda(x)$ caracterizada por $\lambda(exp_{p_\lambda(x)}^{-1} x) \in \partial f(p_\lambda(x))$, onde $f_\lambda(x) = \inf_{y \in M} \{f(y) + \lambda d^2(x, y)\}$.*

*Demonstração.* Ver [5, Lemma 4.2]. □

# 3 Algoritmo do Ponto Proximal Inercial DC

Nesta seção apresentamos um algoritmo que generaliza o algoritmo proposto por Souza e Oliveira [12]. Consideremos no restante deste artigo a seguinte condição, que não é uma hipótese restritiva no contexto DC:

**H-** A função $h$ é fortemente convexa em $M$ com parâmetro $\rho > 0$, ou seja, para cada $v \in \partial h(x)$, temos que

$$h(y) \geq h(x) + \langle v, exp_x^{-1} y \rangle + \frac{\rho}{2} d^2(x, y),\ \forall x, y \in M.$$

Note que **H** não é uma hipótese restritiva. Na verdade, se não é válida **H** para uma certa função DC $f = \varphi - \phi$ podemos obter outra decomposição DC de $f$ satisfazendo a condição **H** adicionando uma função fortemente convexa arbitrária $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ às funções componente, ou seja, $f = g - h$ com $g = \varphi + \psi$ e $h = \phi + \psi$. Podendo sempre tomar $\psi(\cdot) = \dfrac{1}{2} d^2(\cdot, y)$. Para encontrar pontos críticos de uma função DC $f$ em variedades de Hadamard, consideremos o seguinte algoritmo.

**Algoritmo: IDCPPA**

**Passo 1:** Dado um ponto inicial $x^0 \in M$, $\gamma_k \in [0, \frac{\rho}{2})$ e uma sequência limitada de números positivos $\{\mu_k\}$ tal que $0 < a \leq \mu_k \leq b$. Defina $x^{-1} = x^0$.

**Passo 2:** Dado $x^k \in M$, defina $d^k = \gamma_k exp_{x^k}^{-1} x^{k-1}$. Calcule

$$w^k = grad\ h(x^k) \quad e \quad y^k = exp_{x^k} \mu_k (w^k + d^k). \tag{4}$$

**Passo 3:** Encontrar

$$x^{k+1} := \arg\min_{x \in M} \{g(x) + \frac{1}{2\mu_k} d^2(x, y^k)\}. \tag{5}$$

Se $x^{k+1} = x^k$ e $d^k = 0$, pare. Caso contrário, faça $k := k + 1$ e retorne a Passo 2.

Note que se $\gamma_k = 0$, o algoritmo IDCPPA é exatamente o algoritmo proposto por Souza e Oliveira [12]. Se $\gamma_k = 0$ e $h(x) = 0$, o algoritmo IDCPPA é exatamente o algoritmo proposto por Ferreira e Oliveira [5]. Assim no caso em que $g$ e $h$ são diferenciáveis o algoritmo IDCPPA é uma generalização dos algoritmos propostos por [12] e [5].

A boa definição das sequências $\{y^k\}$ e $\{x^k\}$ segue imediatamente das Proposições 2.3 e 2.4.

Agora devemos estabelecer a convergência do algoritmo. Começamos mostrando que o algoritmo IDCPPA para em um ponto crítico de $f$.

 © 2021 SBMAC

**Proposição 3.1.** *Seja $\{x^k\}$ a sequência gerada pelo algoritmo IDCPPA. Suponha que o algoritmo IDCPPA termine na iteração k, então $x^k$ é um ponto crítico de $f$.*

**Prova:** Por (4) e (5), temos que $\frac{1}{\mu_k}exp^{-1}_{x^k}y^k - d^k = grad\ h(x^k)$ e $\frac{1}{\mu_k}exp^{-1}_{x^{k+1}}y^k = grad\ g(x^{k+1})$. Assim, se $x^{k+1} = x^k$ e $d^k = 0$, segue que $\frac{1}{\mu_k}exp^{-1}_{x^k}y^k = grad\ h(x^k)$ e $\frac{1}{\mu_k}exp^{-1}_{x^k}y^k = grad\ g(x^k)$. Portanto, $grad\ f(x^k) = grad\ g(x^k) - grad\ h(x^k) = 0$, isto é, $x^k$ é um ponto crítico de $f$. □

A partir de agora, consideramos $\{x^k\}$ a sequência gerada pelo Algoritmo IDCPPA e, tendo em vista a Proposição 3.1, assumimos que $x^{k+1} \neq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, caso contrário, o algoritmo retorna um ponto crítico da função objetivo $f$.

O seguinte lema desempenha um papel importante na análise de convergência do Algoritmo IDCPPA.

**Lema 3.1.** *Seja $\{x^k\}$ a sequência gerada pelo algoritmo IDCPPA. Se $H$ é assumida e $\gamma_k \in [0, \frac{\rho}{2})$, então a seguinte desigualdade*

$$f(x^{k+1}) + (\frac{1}{b} + \frac{\rho}{4})d^2(x^{k+1}, x^k) \leq f(x^k) + \frac{\rho}{4}d^2(x^k, x^{k-1})$$

*é válida.*

**Prova:** Segue de (4) que $\frac{1}{\mu_k}exp^{-1}_{x^k}y^k - d^k = w^k = grad\ h(x^k)$. Por $H$, temos que

$$h(y) \geq h(x^k) + \langle \frac{1}{\mu_k}exp^{-1}_{x^k}y^k - d^k, exp^{-1}_{x^k}y\rangle + \frac{\rho}{2}d^2(x^k, y),\ \forall y \in M.$$

Fazendo $y = x^{k+1}$, obtemos

$$h(x^{k+1}) \geq h(x^k) + \langle \frac{1}{\mu_k}exp^{-1}_{x^k}y^k - d^k, exp^{-1}_{x^k}x^{k+1}\rangle + \frac{\rho}{2}d^2(x^{k+1}, x^k). \tag{6}$$

Segue de (5) também que $\frac{1}{\mu_k}exp^{-1}_{x^{k+1}}y^k = grad\ g(x^{k+1})$. Então, pela convexidade de $g$, temos

$$g(y) \geq g(x^{k+1}) + \langle \frac{1}{\mu_k}exp^{-1}_{x^{k+1}}y^k, exp^{-1}_{x^{k+1}}y\rangle,\ \forall\ y \in M.$$

Fazendo agora $y = x^k$, obtemos

$$g(x^k) \geq g(x^{k+1}) + \langle \frac{1}{\mu_k}exp^{-1}_{x^{k+1}}y^k, exp^{-1}_{x^{k+1}}x^k\rangle. \tag{7}$$

Somando (6) e (7), obtemos

$$\begin{aligned} &f(x^k) - f(x^{k+1}) + \langle d^k, exp^{-1}_{x^k}x^{k+1}\rangle \geq \\ &\geq \tfrac{1}{\mu_k}[\langle exp^{-1}_{x^k}y^k, exp^{-1}_{x^k}x^{k+1}\rangle + \langle exp^{-1}_{x^{k+1}}y^k, exp^{-1}_{x^{k+1}}x^k\rangle] + \tfrac{\rho}{2}d^2(x^{k+1}, x^k). \end{aligned} \tag{8}$$

Pelo triângulo geodésico $\triangle(y^k, x^k, x^{k+1})$ com $\theta = \angle(exp^{-1}_{x^k}y^k, exp^{-1}_{x^k}x^{k+1})$, obtemos pelo Teorema de comparação para triângulos que

$$d^2(y^k, x^k) + d^2(x^k, x^{k+1}) - 2\langle exp^{-1}_{x^k}y^k, exp^{-1}_{x^k}x^{k+1}\rangle \leq d^2(y^k, x^{k+1}). \tag{9}$$

Analogamente, considere o triângulo geodésico $\triangle(y^k, x^{k+1}, x^k)$ com $\theta = \angle(exp^{-1}_{x^{k+1}}y^k, exp^{-1}_{x^{k+1}}x^k)$, obtemos pelo Teorema de comparação para triângulos que

$$d^2(y^k, x^{k+1}) + d^2(x^{k+1}, x^k) - 2\langle exp^{-1}_{x^{k+1}}y^k, exp^{-1}_{x^{k+1}}x^k\rangle \leq d^2(y^k, x^k). \tag{10}$$

Agora, somando (9) e (10), temos que

$$d^2(x^{k+1}, x^k) \leq \langle exp_{x^k}^{-1} y^k, exp_{x^k}^{-1} x^{k+1} \rangle + \langle exp_{x^{k+1}}^{-1} y^k, exp_{x^{k+1}}^{-1} x^k \rangle. \tag{11}$$

Como $\mu_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e usando (11) em (8), segue que

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) + \langle d^k, exp_{x^k}^{-1} x^{k+1} \rangle \geq \frac{1}{\mu_k} d^2(x^{k+1}, x^k) + \frac{\rho}{2} d^2(x^{k+1}, x^k).$$

Sendo, $0 < \mu_k \leq b$, obtemos

$$(\frac{1}{b} + \frac{\rho}{2}) d^2(x^{k+1}, x^k) \leq f(x^k) - f(x^{k+1}) + \langle d^k, exp_{x^k}^{-1} x^{k+1} \rangle.$$

Da construção do Algoritmo IDCPPA, temos que

$$\begin{aligned} \langle d^k, exp_{x^k}^{-1} x^{k+1} \rangle &= \gamma_k \langle exp_{x^k}^{-1} x^{k-1}, exp_{x^k}^{-1} x^{k+1} \rangle \\ &\leq \tfrac{\gamma_k}{2} \| exp_{x^k}^{-1} x^{k-1} \|^2 + \tfrac{\gamma_k}{2} \| exp_{x^k}^{-1} x^{k+1} \|^2 \\ &= \tfrac{\gamma_k}{2} d^2(x^k, x^{k-1}) + \tfrac{\gamma_k}{2} d^2(x^{k+1}, x^k), \end{aligned}$$

segue-se que

$$(\frac{1}{b} + \frac{\rho}{2}) d^2(x^{k+1}, x^k) \leq f(x^k) - f(x^{k+1}) + \frac{\gamma_k}{2} d^2(x^k, x^{k-1}) + \frac{\gamma_k}{2} d^2(x^{k+1}, x^k).$$

Como $\gamma_k \in [0, \frac{\rho}{2})$, obtemos

$$(\frac{1}{b} + \frac{\rho}{2}) d^2(x^{k+1}, x^k) < f(x^k) - f(x^{k+1}) + \frac{\rho}{4} d^2(x^k, x^{k-1}) + \frac{\rho}{4} d^2(x^{k+1}, x^k).$$

Daí,

$$(\frac{1}{b} + \frac{\rho}{4}) d^2(x^{k+1}, x^k) < f(x^k) - f(x^{k+1}) + \frac{\rho}{4} d^2(x^k, x^{k-1}).$$

□

Esta propriedade é suficiente para provar a convergência do algoritmo IDCPPA. Temos o cuidado de mencionar que a sequência $\{f(x^k)\}$ não é necessariamente monótona, em contraste com outros algoritmos DC encontrados na literatura.

Observe que, no Algoritmo IDCPPA, pela Proposição 2.2, se $\{x^k\}$ é limitada, então $\{w^k\}$ também é limitada. Como a aplicação exponencial é um difeomorfismo, também temos que $\{d^k\}$ e $\{y^k\}$ são limitadas.

**Teorema 3.1.** *Seja $\{x^k\}$ a sequência gerada pelo algoritmo IDCPPA. Se $\gamma_k \in [0, \frac{\rho}{2})$, $H$ é assumida e $\{x^k\}$ é limitada, então*

*i)* $\lim_{k \to \infty} d(x^{k+1}, x^k) = 0$.

*ii) todo ponto de acumulação de $\{x^k\}$ é ponto crítico de $f$.*

**Prova:** i) Segue do Lema 3.1 que a sequência $\left\{ f(x^k) + \frac{\rho}{4} d^2(x^k, x^{k-1}) \right\}$ é monótona decrescente. Além disso,

$$f(x^k) \leq f(x^k) + \frac{\rho}{4} d^2(x^k, x^{k-1}) \leq f(x^0) + \frac{\rho}{4} d^2(x^0, x^{-1}) = f(x^0).$$

 © 2021 SBMAC

Pela desigualdade do Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b}d^2(x^{k+1},x^k) &\leq \sum_{k=1}^{n}\left[\left(f(x^k)+\frac{\rho}{4}d^2(x^k,x^{k-1})\right)-\left(f(x^{k+1})+\frac{\rho}{4}d^2(x^{k+1},x^k)\right)\right]\\ &= f(x^0)-\left(f(x^{n+1})+\tfrac{\rho}{4}d^2(x^{n+1},x^n)\right).\end{aligned}$$

Sendo $f$ limitada por baixo, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b}d^2(x^{k+1},x^k) \leq f(x^0)-\lim_{n\to\infty}\left(f(x^{n+1})+\frac{\rho}{4}d^2(x^{n+1},x^n)\right) \leq f(x^0)-\inf_{x\in M} f(x) < +\infty.$$

Logo, $\lim\limits_{k\to\infty} d(x^{k+1},x^k)=0$.

ii) Sejam $x$ e $y$ pontos de acumulação de $\{x^k\}$ e $\{y^k\}$, respectivamente. Então, considere duas subsequências $x^{k_j}$ e $y^{k_l}$ convergindo respectivamente para $x$ e $y$, isto é, $x^{k_j}\to x$ e $y^{k_l}\to y$. Como $\{\mu_{k_j}\}$ é limitada, podemos assumir sem perda de generalidade que $\mu_{k_j}\to\mu$.

Segue de i) que $x^{k_j+1}\to x$ e $x^{k_j-1}\to x$ . Por (4), temos que

$$\frac{1}{\mu_{k_j}}exp^{-1}_{x^{k_j}}y^{k_j}-d^{k_j}=grad\ h(x^{k_j}).$$

Pela continuidade diferenciável de $h$, obtemos

$$\frac{1}{\mu}exp^{-1}_{x}y=grad\ h(x). \tag{12}$$

Analogamente, por (5), temos que

$$\frac{1}{\mu_{k_j}}exp^{-1}_{x^{k_j+1}}y^{k_j}=grad\ g(x^{k_j+1}).$$

Pela continuidade diferenciável de $g$, obtemos

$$\frac{1}{\mu}exp^{-1}_{x}y=grad\ g(x). \tag{13}$$

Sendo $grad\ f(x)=grad\ g(x)-grad\ h(x)$, segue de (12) e (13) que

$$grad\ f(x)=grad\ g(x)-grad\ h(x)=0.$$

Portanto, $x$ é ponto crítico de $f$. □

# 4 Conclusões

Neste artigo, consideramos um método de ponto proximal inercial para calcular pontos críticos das funções DC (suaves) em variedades de Hadamard. Em trabalhos futuros iremos considerar experimentos numéricos do método comparando com outros existentes em variedades de Hadamard. Os resultados obtidos podem ser adaptados para usar uma retração em substituição a aplicação exponencial, conforme Absil et al. [1] e Almeida et al. [2]. Também estudaremos a influência prática do parâmetro $\gamma_k$ que depende da escolha do parâmetro $\rho$.

 © 2021 SBMAC

# Referências

[1] Absil P.-A., Mahony R. and Sepulchre R. *Optimization algorithms on matrix manifolds.* Princeton University Press, 2009.

[2] Almeida, Y.T., Cruz Neto, J.X., Oliveira,P.R. and Souza, J.C.O. A modified proximal point method for DC functions on Hadamard manifolds, *Computational Optimization and Applications*, 76:649–673, 2020. DOI: 10.1007/s10589-020-00173-3.

[3] Bento, G.C., Ferreira, O.P. and Melo. J.G. Iteration-Complexity of Gradient, Subgradient and Proximal Point Methods on Riemannian Manifolds, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 173:548–562, 2017. DOI: 10.1007/s10957-017-1093-4.

[4] Elhilali Alaoui, A. Caractrisation des fonctions D.C. (Characterization of D. C. functions), *Ann. Sci. Math. Quebec*, 20: 1-13, 1996.

[5] Ferreira, O.P. and Oliveira, P.R. Proximal point algorithm on Riemannian manifolds, *Optimization*, 51:257-270, 2002. DOI:10.1080/02331930290019413.

[6] Hiriart-Urruty, J.B. Generalized differentiabity, duality and optimization for problems dealing with difference of convex functions, *Convexity and Duality in Optimization*, 37-70, 1985. DOI:10.1007/978-3-642-45610-7_3.

[7] Hiriart-Urruty, J.B. From convex optimization to nonconvex optimization. Necessary and sufficient conditions for global optimality, *Nonsmooth Optimization and Related Topics*, Springer US, chapter 13, pages 219-239, 1989.

[8] Hiriart-Urruty, J.B. and Tuy, H. Essays on nonconvex optimization, *Mathematical Programming*, volume 41, 1988.

[9] Li, C., López, G. and Martín-Márquez, V. Monotone vector fields and the proximal point algorithm on Hadamard manifolds, *J. Lond. Math. Soc.*, 79:663-683, 2009. doi:10.1112/jlms/jdn087.

[10] Oliveira, W. and Tcheou, M. Level An inertial algorithm for DC programming, *Set-Valued and Variational Analysis*, 27:895-919, 2019. DOI: 10.1007/s11228-018-0497-0.

[11] Sakai, T. *Riemannian Geometry. Translations of Mathematical Monographs, volume 149.* American Mathematical Society, Providence, 1996.

[12] Souza,J.C.O. and Oliveira,P.R. A proximal point method for DC functions on Hadamard manifolds, *Jornal of Global Optimization*, 63:797-810, 2015. DOI:10.1007/s10898-015-0282-7.

[13] Sun, W., Sampaio, R.J.B. and Candido, M.A.B. Proximal point algorithm for minimization of DC Functions, *Journal of Computational Mathematics*, 21:451-462, 2003.

[14] Toland, J.F. Duality in nonconvex optimization, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 66:399-415, 1978. DOI:10.1016/0022-247x(78)90243-3.

[15] Udriste, C. *Convex Functions and Optimization Algorithms on Riemannian Manifolds.* Mathematics and Its Applications, **297**. Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

 © 2021 SBMAC