

Sistemas Dinâmicos com Derivadas Fracionárias Aplicado a Problemas de Populações Interagentes

Cibelle Abelenda Tavares¹

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF, FURG, Rio Grande, RS

Matheus Jatkoske Lazo²

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF, FURG, Rio Grande, RS

1 Introdução

A principal motivação para o estudo das equações diferenciais é que, mesmo as equações mais simples, descrevem modelos físicos importantes, por exemplo, o crescimento de uma população, a proliferação de doenças, o sistemas massa-mola, dentre outros [4]. Neste contexto, o cálculo fracionário também conhecido como cálculo de ordem não inteira, desempenha um papel de crescente destaque. Desde o início da teoria do cálculo diferencial e integral, matemáticos como Euler e Liouville desenvolveram suas ideias sobre o cálculo de derivadas e integrais de ordem não inteiras.

Dentre as áreas recentes de aplicação do cálculo fracionário, pode-se destacar a modelagem de epidemias, na qual propõe-se modelos que possam ajudar a traçar políticas de controle dessas doenças de forma a erradicá-las o mais rápido possível. Com base nessa premissa, em virtude do cenário atual, onde o mundo enfrenta a pandemia causada pelo coronavírus (COVID-19), decidiu-se nesse trabalho estudar o modelo estruturado de epidemia compartimental do tipo SIRD para populações interagentes. O modelo SIRD é uma generalização do conhecido modelo compartimental SIR que inclui a taxa de mortes da população, denotada por D.

2 Derivadas Fracionárias

Neste trabalho utilizaremos a derivada fracionária de Caputo, pois entre as definições existentes de derivadas fracionárias, a definição de Caputo é a mais popular entre físicos e engenheiros, por conta de suas propriedades algébricas e por depender de condições iniciais (ou limites) usuais [1].

A derivada fracionária à esquerda de Caputo de ordem $\alpha > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) é definida por:

$${}^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{1+\alpha-n}} dt \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

onde $f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ são derivadas ordinárias de ordem inteira n . Em especial, para $\alpha = 1$ a derivada de Caputo se reduz a uma derivada usual de primeira ordem.

¹cibelletavares@hotmail.com

²matheusjlazo@gmail.com

3 O Modelo SIRD fracionário para duas populações

Para o caso do COVID-19, são monitorados o número de casos registrados, o número de mortes e o número de casos ativos. Vamos considerar o caso de duas populações distintas interagentes (populações em cidades vizinhas). Seja N_i o número de indivíduos na população i ($i = 1, 2$) e $N_T = N_1 + N_2$ a população total integrada. Sejam S_i, I_i, R_i e D_i as frações, em relação ao N_i , da população i que são, suscetíveis, infectados, recuperados e mortes, respectivamente, no tempo t . No modelo considera-se, a evolução temporal dada pelo seguinte sistema dinâmico para $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha S_i &= - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j + \mu_i(1 - S_i - D_i) - vS_i + \phi_i R_i \\ {}_0^C D_t^\alpha I_i &= \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j - (\gamma_i + \kappa_i + \mu_i) I_i \\ {}_0^C D_t^\alpha R_i &= \gamma_i I_i - \mu_i R_i + vS_i - \phi_i R_i \\ {}_0^C D_t^\alpha D_i &= \kappa_i I_i, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $0 < \alpha \leq 1$ é a ordem da derivada, β_{ij} é a taxa de transmissão da doença, ϕ_i é taxa de reinfecção, v taxa de vacinação, κ_i é a taxa de mortes da população infectada pela doença, γ_i é o inverso do período infeccioso médio, para $i = 1, 2$. Além disso, assume-se que as taxas de mortalidade μ_i é igual as taxas de natalidade, de forma que o N_i total da população é constante durante as doenças. Portanto, tem-se que $S_i(t) + I_i(t) + R_i(t) + D_i(t) = 1$. É importante reforçar, que no modelo com reinfecção, o parâmetro ϕ_i controla a taxa com que indivíduos recuperados retornam à condição de suscetíveis [2]. Para doenças em que a reinfecção ocorre, a vacinação é ferramenta importante para conferir aos indivíduos imunidade contra a doença, sem que este venha a contraí-la. No modelo SIRD, esse processo corresponde à passagem direta de indivíduos do compartimento de suscetíveis para o compartimento de recuperados [3].

4 Conclusão

O objetivo do presente trabalho é investigar o uso do cálculo fracionário na modelagem de epidemias de populações interagentes. Propomos um modelo do tipo SIRD para duas cidades interagentes com derivadas fracionárias. Como continuação do trabalho, iremos analisar os dados ao longo do tempo referentes ao número acumulado de casos confirmados e mortes causadas pela COVID-19 fazendo uma análise qualitativa, iremos também estudar políticas públicas como quarentena em massa e vacinação.

Referências

- [1] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- [2] Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L. *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos, 2a. edição*. Atlanta: Elsevier, 2004.
- [3] Rizzi, F. A. Análise de Modelo Tipo SIR Para o Caso da Pandemia do COVID-19 em 2020, *ResearchGate*, 26-28, 2020. DOI: 10.6084/m9.figshare.12594566.
- [4] Varalta, N. Das Transformadas Integrais ao Cálculo Fracionário Aplicado à Equação Logística. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista - Júlio de Mesquita Filho, Botucatu, São Paulo, 2014.