

# Códigos Perfeitos Bidimensionais em Reticulados Algébricos

João E. Strapasson<sup>1</sup>

Unicamp, Limeira, SP

Giselle Strey<sup>2</sup>

Unicamp, Campinas, SP

**Resumo.** Este trabalho consiste numa investigação sobre a quantidade de Códigos Perfeitos, sub-reticulados, em Reticulados Algébricos bidimensionais obtidos via mergulho de Minkowski. Em contraste com os Códigos Perfeitos nos reticulados  $\mathbb{Z}^2$  e Hexagonal, considerar os Reticulados Algébricos resultou em um número grande de Códigos Perfeitos.

**Palavras-chave.** Reticulados Algébricos, Código Perfeitos, Mergulho de Minkowski.

## 1 Introdução

Ao longo dos últimos anos, diversos autores exploraram a existência e a não existência de Códigos Perfeitos (no reticulado  $\mathbb{Z}^n$ ), vide [4,6,7,9,10]. Em especial os autores Golomb and Welch, em [5], conjecturam que na métrica  $\ell_1$  (métrica do táxi) os perfeitos existiam para dimensões baixas e raios pequenos. E, e então diversos autores deram suas contribuições reforçando a conjectura.

Constata-se que há poucos Códigos Perfeitos no ambiente  $\mathbb{Z}^n$ , quando se leva em conta as métricas: do táxi e a métrica euclidiana. Então outros autores começaram a explorar as métricas  $\ell_p$  [1], e também o estudo de Códigos Quase-perfeitos [11]. Mesmo considerando essas outras métricas o número de códigos Perfeitos, ainda aparecem em números modestos, e também restritos às dimensões baixas.

Há ainda autores que investigaram um pouco sobre Códigos Perfeitos sob alguma métrica no reticulado raiz  $A_n$ , (vide [3,8]), e inspirados nestes estudos, passamos a investigar e estabelecer condições de necessárias para a existência destes códigos em reticulados mais gerais, i.e., não restritos apenas aos reticulados  $\mathbb{Z}^n$  e  $A^n$ . Este reticulado mais geral será a partir deste momento denominado de Reticulado Ambiente, conceito introduzido em [12].

A condição de existência de perfeitos está fortemente atrelada ao raio de cobertura do reticulado ambiente. Em outras palavras, o reticulado ambiente que possui um raio de cobertura grande tem muito mais chances de possuir Códigos Perfeitos e em maior quantidade.

Neste trabalho consideraremos em especial duas famílias como reticulado ambiente, tais famílias foram obtidas via mergulho de Minkowski, e cuja matriz de Gram, que é integral, depende de um parâmetro inteiro  $l$ , a medida que aumentamos o parâmetro  $l$ , o raio de cobertura do reticulado ambiente aumenta, e o número de Códigos Perfeitos também aumenta.

Este trabalho está subdividido nas seguintes seções: Preliminares (nesta seção iremos introduzir os elementos essenciais deste trabalho), Códigos Perfeitos (aqui generalizamos as condições de existência para reticulados ambientes gerais), e Códigos Perfeitos em Reticulados Algébricos Bidimensionais (nesta última faremos um estudo de caso, em que o número de Códigos Perfeitos pode ser muito grande).

---

<sup>1</sup>strapass@unicamp.br.

<sup>2</sup>giselleribeiro2006@hotmail.com.

## 2 Preliminares

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos básicos, limitados aos essenciais a este trabalho, mais detalhes vide [2].

### 2.1 Reticulados

Seja  $\{v_1, \dots, v_m\}$  um conjunto de vetores linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, m\} \right\} \quad (1)$$

é chamado de **reticulado** e  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é dita uma **base** do reticulado. Neste caso, dizemos que o reticulado  $\Lambda$  é gerado pela base  $\{v_1, \dots, v_m\}$ .

O espaço gerado por todas as combinações lineares dos vetores  $v_1, \dots, v_m$  é denotado por  $\text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ . Se  $M$  é uma matriz geradora para um reticulado  $\Lambda$ , representamos por  $\text{span}(M)$  ou  $\text{span}(\Lambda)$  o espaço vetorial gerado pelas linhas da matriz  $M$ .

Seja  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  um reticulado e  $\{v_1, \dots, v_m\}$  uma base de  $\Lambda$ , em que  $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$  para  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Chamamos de **matriz geradora** de  $\Lambda$  a matriz  $M$  cujas linhas são formadas pelos vetores de uma base do reticulado, isto é,

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

é uma matriz geradora de  $\Lambda$ .

Dois reticulados  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  em  $\mathbb{R}^n$  são ditos **equivalentes** (e denotados por  $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$ ) se existirem uma isometria  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e um número real positivo  $c$  tais que  $(c\sigma)(\Lambda_1) = \Lambda_2$ . Dizemos que  $c$  é a **razão de semelhança** de  $\Lambda_1$  para  $\Lambda_2$ .

A matriz  $G = MM^T$  é chamada de **matriz de Gram** do reticulado gerado por  $M$ . O **determinante** do reticulado  $\Lambda$ , denotado por  $\det(\Lambda)$ , é definido como o determinante da matriz de Gram, isto é,  $\det(\Lambda) = \det(G)$ .

Dizemos que  $\Lambda_1 \subset \Lambda$  é um **sub-reticulado** de  $\Lambda$  se  $\Lambda_1$  também for um reticulado.

Um reticulado  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  é dito **integral** se  $x \cdot y \in \mathbb{Z}$ , para quaisquer  $x, y \in \Lambda$ .

Sejam  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  um reticulado e  $\beta = \{b_1, \dots, b_m\}$ , com  $m \leq n$ , uma base para  $\Lambda$ . Dado um elemento  $v$  de  $\Lambda$ , a **região de Voronoi** de  $v$  é definida como

$$\mathcal{V}(v) = \{x \in \text{span}(\beta) : \|x - v\| \leq \|x - u\|, \forall u \in \Lambda\}. \quad (2)$$

Em outras palavras, a região de Voronoi de  $v$  é formada por todos os pontos do  $\text{span}(\beta)$  que estão mais próximos ou a mesma distância de  $v$  do que de qualquer outro ponto de  $\Lambda$ .

### 2.2 Empacotamento e Cobertura

Seja  $V$  um espaço vetorial normado. A **bola fechada (real)** centrada em  $z \in V$  com raio  $r > 0$ , denotada por  $B(z, r)$ , é definida como  $B(z, r) = \{x \in V : \|x - z\| \leq r\}$ . Quando  $z = \mathbf{0}$ , por simplicidade, denotaremos a bola como  $B_r$  ao invés de  $B(\mathbf{0}, r)$ .

Um **empacotamento esférico**, ou simplesmente um empacotamento em  $V$ , é uma distribuição de bolas/esferas, todas de mesmo raio, de forma que duas bolas/esferas não se interceptam ou se interceptam apenas nos bordos. Um **empacotamento reticulado** é um empacotamento esférico em que o conjunto dos centros das bolas/esferas forma um reticulado em  $V$ .

O **raio de empacotamento** de um reticulado  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ , denotado por  $\rho$ , é o maior raio para o qual é possível distribuir bolas/esferas centradas nos elementos de  $\Lambda$  e obter um empacotamento reticulado, isto é,

$$\rho = \max\{r \in \mathbb{R} : \Lambda + B_r = \mathbb{R}^n\} \tag{3}$$

é raio de empacotamento.

Dado um reticulado  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ , definimos a **densidade de empacotamento** esférico de  $\Lambda$  como

$$\begin{aligned} \Delta(\Lambda) &= \frac{\text{volume de uma esfera de raio } \rho}{\text{volume da região fundamental de } \Lambda} = \\ &= \frac{\text{vol}(B_\rho)}{\text{vol}(\Lambda)} = \frac{\text{vol}(B_1)\rho^n}{\text{vol}(\Lambda)} = \frac{\text{vol}(B_1)\rho^n}{\det(\Lambda)^{1/2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Sejam  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  um reticulado e  $V = \text{span}(\Lambda)$ , dizemos que o conjunto  $\Lambda + B_r$  é uma **cobertura** de  $V$  se  $V \subset (\Lambda + B_r)$ .

Sejam  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  um reticulado e  $V = \text{span}(\Lambda)$ , o número

$$R_\Lambda = \min\{r : \Lambda + B_r \text{ é uma cobertura de } V\} \tag{5}$$

é chamado de **raio de cobertura** de  $\Lambda$ . Em outras palavras, o raio de cobertura de um reticulado  $\Lambda$  é o menor  $r > 0$  tal que  $\bigcup_{z \in \Lambda} B(z, r) \supset V$ .

Sejam  $\Lambda$  um reticulado e  $V = \text{span}(\Lambda)$ , a densidade de cobertura em  $V$  de  $\Lambda$  é dada por

$$\Theta(\Lambda) = \frac{V_n R_\Lambda}{\text{vol}(\Lambda)}. \tag{6}$$

### 3 Códigos Perfeitos

Dado um reticulado  $\Lambda_a$ , a **bola discreta**, denotada por  $\tilde{B}(z, r)$ , centrada em  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Lambda_a$  e com raio  $r$ , é definida como  $\tilde{B}(z, r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Lambda_a : (x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2 \leq r^2\}$ . Quando  $z = \mathbf{0}$ , por simplicidade escreveremos  $\tilde{B}_r$  ao invés de  $\tilde{B}(\mathbf{0}, r)$ .

Seja  $\Lambda \subset \Lambda_a$  um reticulado. Como é bem conhecido na literatura, a distância mínima de um reticulado  $\Lambda$ , denotada por  $d(\Lambda)$ , é a norma euclidiana de um vetor não-nulo de norma mínima de  $\Lambda$ , e o raio de empacotamento, denotado por  $r(\Lambda)$ , é definido como o maior  $r$  tal que

- (i)  $((\tilde{B}_r + \lambda) \cap \tilde{B}_r) \cap \Lambda_a = \emptyset$ , em que  $\mathbf{0} \neq \lambda \in \Lambda$ ;
- (ii)  $[q^{r^2}] \Theta_{\Lambda_a} \neq 0$ , isto é, existem pontos do reticulado com norma igual a  $r$ .

Se, além das duas propriedades acima,  $\Lambda$  cumprir a seguinte propriedade:

- (iii)  $\tilde{B}_r + \Lambda = \Lambda_a$ ;

dizemos que  $\Lambda$  é um **código  $r$ -perfeito** em  $\Lambda_a$ . Vale ressaltar que neste capítulo estaremos denotando reticulado por código.

Seja  $\mathcal{D}_n$  o conjunto de todas as distâncias atingíveis em  $\Lambda_a$ , isto é,

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n(\Lambda_a) = \{\|\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \Lambda_a\}. \tag{7}$$

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{D}_n \\ x &\longmapsto \max\{y \in \mathcal{D}_n : y \leq x\}. \end{aligned}$$

Definimos anteriormente o raio de cobertura de um código (reticulado)  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ , que é o menor número real  $r$  tal que  $\bigcup_{z \in \Lambda} \tilde{B}(z, r) \supset \mathbb{R}^n$ . Agora, vamos definir o raio de cobertura discreto de um código.

O **raio de cobertura (discreto)** de um código  $\Lambda$ , denotado por  $\tilde{R}_\Lambda$ , é o menor  $r \in \mathcal{D}_n$  tal que  $\bigcup_{z \in \Lambda} \tilde{B}(z, r) = \Lambda_a$ .

### 3.1 Condições de Existência

**Teorema 3.1.** *Em um espaço ambiente  $\Lambda_a$ , o raio de um código linear perfeito  $\Lambda$  satisfaz*

$$r \leq M \frac{(1+(\Delta^n)^{1/n})}{(1-(\Delta^n)^{1/n})} \tag{8}$$

$$\leq R_{\Lambda_a} \frac{(1+(\Delta^n)^{1/n})}{(1-(\Delta^n)^{1/n})}, \tag{9}$$

em que  $\Delta^n$  é a densidade máxima de um reticulado de posto completo,  $M = \min_{z \in \Lambda_a} \|\mathbf{x}/2 - \mathbf{u}\|$  e  $\mathbf{x}$  é um vetor de norma mínima em  $\Lambda$ .

**Teorema 3.2.** *Em um espaço ambiente  $\Lambda_a$ , o raio  $r$  de um código linear perfeito  $\Lambda_r$  satisfaz*

$$r \leq R_{\Lambda_a} \frac{((\Theta^n)^{1/n} + 1)}{((\Theta^n)^{1/n} - 1)}, \tag{10}$$

em que  $\Theta^n$  é o ínfimo das densidades de cobertura sobre todos os reticulados  $n$ -dimensionais de posto completo e  $R_{\Lambda_a}$  é o raio de cobertura de  $\Lambda_a$ .

## 4 Códigos Perfeitos em Reticulados Algébricos Bidimensionais

Neste trabalho vamos considerar duas famílias de reticulados algébricos bidimensionais, obtidas pelo mergulho de Minkowski, o processo de obtenção destes reticulados será omitido aqui:

### 4.1 $-l \equiv 1 \pmod{4}$

O reticulado algébrico  $\Lambda_{a,l,1}$  possui matrizes geradora e de Gram, respectivamente:

$$M_l = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}l/2 \end{pmatrix} \text{ e } G_l = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & (l+1)/2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

#### 4.1.1 Tipo 1: polihexágono de um nível

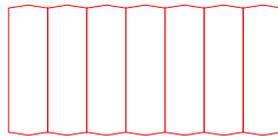


Figura 1: Polihexágono do Tipo 1 construído para  $l = 43$ .

Neste formato de ladrilho os polihexágonos construídos possuem apenas uma camada.

A bola do Tipo 1 é definida como  $B_r = \{(a,0)M_{l,1} \in \mathbb{R}^2 : (a,0)G_{l,1}(a,0)^T \leq r^2 < (l+1)/2 \text{ e } (a,0) \in \mathbb{Z}_+^2\}$ , em que  $G_{l,1}$  é a matriz de Gram associada a  $M_{l,1}$  que gera  $\Lambda_{a,l,1}$ .

**Teorema 4.1.** *Os polihexágonos do Tipo 1 ladrilham o  $\mathbb{R}^2$ .*

**Teorema 4.2.** *Para cada  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $-l \equiv 1 \pmod{4}$ , o número de raios para os quais temos códigos perfeitos do Tipo 1 em  $\Lambda_{a,l,1}$  é igual a  $\lfloor \sqrt{l-3}/2 \rfloor$ .*

**4.1.2 Tipo 2: polihexágono de três níveis**

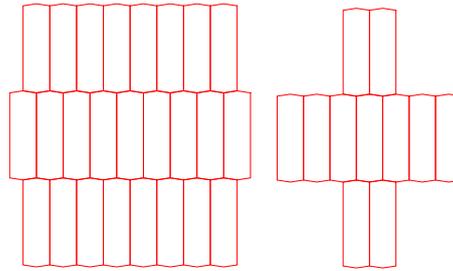


Figura 2: Polihexágonos do Tipo 2 construídos para  $l = 43$ .

Nesse formato de ladrilho os polihexágonos possuem três camadas, sendo a camada central sempre maior do que as camadas laterais.

A bola  $\tilde{B}_r$  do Tipo 2 é composta por todos os vetores  $(a, 1)M_{l,1}, (b, 0)M_{l,1} \in \mathbb{R}^2$  tais que  $(b, 0)G_{l,1}(b, 0)^T \leq r^2 < 2l$  e  $(a, 1)G_{l,1}(a, 1)^T \leq r^2 < 2l$ , em que  $G_{l,1}$  é a matriz de Gram de  $\Lambda_{a,l,1}$ . Definimos então a bola do Tipo 2 como  $\tilde{B}_r = \{uM_{l,1} \in \mathbb{R}^2 : (l+1)/2 \leq uG_{l,1}u^T \leq r^2 < 2l \text{ e } u \in \mathbb{Z}_+^2, \text{ em que } u = (a, 1) \text{ ou } (b, 0)\}$ .

**Teorema 4.3.**  $\mathcal{R}_1$  é um  $\Lambda_2$ -ladrilho para  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 4.4.** *Para cada  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $-l \equiv 1 \pmod{4}$  temos que o número de raios para os quais  $\Lambda_{l,1} \subset \Lambda_{a,l,1}$  é um código perfeito do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo  $(a, 1)M_{l,1}$  é igual a  $\lfloor (1 + \sqrt{3l})/2 \rfloor$ , se  $3l$  não é um quadrado perfeito, e  $(1 + \sqrt{3l})/2 - 1$ , caso contrário.*

**4.2  $l \equiv 2 \pmod{4}$**

O reticulado algébrico  $\Lambda_{a,l,2}$  possui matriz geradora e matriz de Gram, respectivamente,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{l} & -\sqrt{l} \end{pmatrix} \text{ e } G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2l \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Note que  $\det(\Lambda_{a,l,2}) = 4l$  e a distância mínima  $d$  é igual 2. Então, temos que

$$\Delta(\Lambda_{a,l,2}) = \frac{\pi(2/2)^2}{2\sqrt{l}} = \frac{\pi}{2\sqrt{l}} \implies \Delta(\Lambda_{a,l,2}) \longrightarrow 0, \text{ quando } l \longrightarrow +\infty.$$

Observe também que o raio de cobertura  $R_{\Lambda_{a,l,2}}$  é igual a  $\sqrt{2l+1}/2$ . Então,

$$r \leq R_{\Lambda_{a,l,2}} \frac{(1 + (\Delta^n)^{1/n})}{(1 - (\Delta^n)^{1/n})} = \frac{\sqrt{2l+1}}{2} \frac{(1 + (\pi/\sqrt{12})^{1/2})}{(1 - (\pi/\sqrt{12})^{1/2})}.$$

Logo, como  $\frac{\sqrt{2l+1}}{2} \frac{(1 + (\pi/\sqrt{12})^{1/2})}{(1 - (\pi/\sqrt{12})^{1/2})} \longrightarrow +\infty$  quando  $l \longrightarrow +\infty$ , quanto maior o valor de  $l$ , mais chances teremos de encontrar raios grandes para os quais existem códigos perfeitos em  $\Lambda_{a,l,2}$ .

Para essa família de reticulados, para cada valor de  $l$ , considerando os raios para os quais  $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$  é um código perfeito, também observamos que os políominos construídos, que chamaremos aqui de poliretângulos, possuem alguns formatos específicos, e estudaremos três desses formatos, que denotaremos por “Tipo 1” e “Tipo 2”. A seguir, vamos descrever esses formatos e fornecer alguns resultados sobre cada um deles.

**4.2.1 Tipo 1: poliretângulo de um nível**

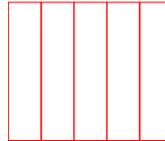


Figura 3: Poliretângulo do Tipo 1 construído para  $l = 18$ .

Neste formato de ladrilho os poliretângulos construídos possuem apenas uma camada.

A bola do Tipo 1 é definida como  $\tilde{B}_r = \{(a, 0)M_{l,2} \in \mathbb{R}^2 : (a, 0)G_{l,2}(a, 0)^T \leq r^2 < 2l \text{ e } (a, 0) \in \mathbb{Z}_+^2\}$ , em que  $G_{l,2}$  é a matriz de Gram de  $\Lambda_{a,l,2}$  associada a  $M_{l,2}$ .

**Teorema 4.5.** *Os poliretângulos do Tipo 1 ladrilham o  $\mathbb{R}^2$ .*

**Teorema 4.6.** *Para cada  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $l \equiv 2 \pmod{4}$ , o número de raios para os quais  $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$  é um código perfeito do Tipo 1 é igual a  $\lfloor \sqrt{l} \rfloor$ .*

**4.2.2 Tipo 2: poliretângulo de três níveis**

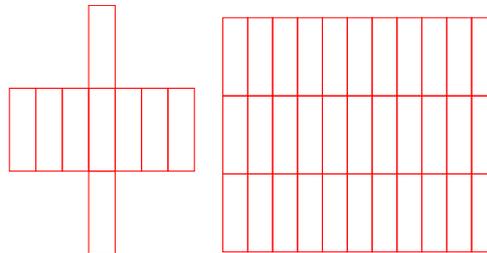


Figura 4: Poliretângulos do Tipo 2 construídos para  $l = 10$ .

Neste formato de ladrilho os poliretângulos possuem três camadas, sendo a camada central maior ou igual do que as camadas laterais.

A bola  $\tilde{B}_r$  do Tipo 2 é composta por todos os vetores  $(a, 1)M_{l,2}, (b, 0)M_{l,2} \in \mathbb{R}^2$  tais que  $(a, 1)G_{l,2}(a, 1)^T \leq r^2 < 2l$  e  $(b, 0)G_{l,2}(b, 0)^T \leq r^2 < 2l$ . Definimos então a bola do Tipo 2 como  $\tilde{B}_r = \{\mathbf{u}M_{l,2} \in \mathbb{R}^2 : 2l \leq \mathbf{u}G_{l,2}\mathbf{u}^T \leq r^2 < 8l \text{ e } \mathbf{u} \in \mathbb{Z}_+^2, \text{ em que } \mathbf{u} = (a, 1) \text{ ou } (b, 0)\}$ .

**Teorema 4.7.**  $\mathcal{R}_1$  é um  $\Lambda_2$ -ladrilho para  $\mathbb{R}^2$ .

**Example** Para  $l = 2$ , os pares  $(\alpha, \beta)$  que são poliretângulos do Tipo 2 são  $(1, 0), (1, 1), (2, 1)$  e  $(2, 2)$ .

**Teorema 4.8.** *Para cada  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $l \equiv 2 \pmod{4}$ , o número de raios para os quais  $\Lambda_{l,2} \subset \Lambda_{a,l,2}$  é um código perfeito do Tipo 2 em que o raio da bola é dado por um vetor do tipo  $(a, 1)M_{l,2}$  é igual a  $\lceil \sqrt{3l} \rceil$ .*

## 5 Conclusões

Em reticulados ambientes com raio de cobertura grande, vide reticulados algébricos apresentados, se mostram muito mais ricos que os reticulados  $\mathbb{Z}^2$  e Hexagonal do ponto de vista da quantidade de Códigos Perfeitos.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq (313326/2017-7, 141343/2019-2, 432735/2016-0 e 429346/2018-2) e a FAPESP (2013/25977-7).

## Referências

- [1] Campello, A., Jorge, G. C., Strapasson, J. E. and Costa, S. I. R., Perfect codes in the  $l_p$  metric, *European Journal of Combinatorics*, 53:72-85, 2016. DOI:10.1016/j.ejc.2015.11.002.
- [2] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. New York: Springer Verlag, 3 ed., 1998.
- [3] Costa, S. I. R., Muniz, M., Agustini, E. and Palazzo, R., Graphs, tessellations, and perfect codes on flat tori, *IEEE Transactions on Information Theory*, 50:2363-2377, 2004. DOI:10.1109/TIT.2004.834754.
- [4] Etzion, T., Vardy, A. and Yaakobi, E., Dense error-correcting codes in the lee metric, *IEEE Information Theory Workshop*, 1-5, 2010. DOI:10.1109/CIG.2010.5592743.
- [5] Golomb, S. W. and Welch, L. R. Perfect codes in the lee metric and the packing of polyominoes, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 18:302–317, 1970. DOI:10.1137/0118025.
- [6] Horak, P., and AlBdaiwi, B. F., Diameter perfect lee codes, *IEEE Transactions on Information Theory*, 58:5490–5499, 2012. DOI:10.1109/TIT.2012.2196257.
- [7] Kim, D., Nonexistence of perfect 2-error-correcting lee codes in certain dimensions, *European Journal of Combinatorics*, 63:1-5, 2017. DOI:10.1016/j.ejc.2017.01.007.
- [8] Kovacevic, M., Codes in  $A_n$  lattices: Geometry of  $B_h$  sets and difference sets, *arXiv* 2016. arXiv:1409.5276.
- [9] Livingston, M. and Q. F. Stout, Perfect dominating sets, *Congr. Numer.*, 79:187-203, 1990.
- [10] Qureshi, C., Campello, A. and Costa, S. I. R., Non-existence of linear perfect lee codes with radius 2 for infinitely many dimensions, *IEEE Transactions on Information Theory*, 64:3042-3047, 2018. DOI:10.1109/TIT.2018.2797049.
- [11] Strapasson, J. E., Jorge, G. C., Campello, A. and Costa, S. I. R., Quasi-perfect codes in the  $l_p$  metric, *Computational and Applied Mathematics*, 37:852-866, 2018. DOI:10.1007/s40314-016-0372-2
- [12] Strey, G., Campello, A., Strapasson, J. E. and Costa, S. I. R., Perfect Codes in Euclidean Lattices: Bounds and Case Studies, *2019 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), Paris, France*, 1607-1611, 2019. DOI:10.1109/ISIT.2019.8849538