

Análise espectral de modulações digitais que utilizam sinais caóticos

Rafael Alves da Costa e Marcio Eisencraft¹

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP

Sistemas dinâmicos não lineares de tempo discreto que geram sinais caóticos tem sido considerados em inúmeras aplicações práticas, como por exemplo, modulações digitais. Nessa aplicação é importante conhecer e controlar a Densidade Espectral de Potência (DEP) dos sinais envolvidos. Recentemente, alguns progressos foram obtidos na dedução da DEP para mapas lineares por partes que geram sinais caóticos [1]. Entretanto, há poucos estudos com relação a DEP de modulações digitais que utilizam esses sinais.

No presente trabalho, obtém-se analiticamente a DEP da modulação por chaveamento caótico (CSK - *Chaos Shift Keying*) [2] que utiliza mapas lineares por partes.

Considere-se o mapa linear por partes $f : [-1, 1[\rightarrow [-1, 1[$ que é definido por $x(n+1) = f(x(n))$, em que, $1 \leq j \leq r \geq 2$,

$$f(x) = \beta_j \left\{ \frac{2x - (\alpha_j + \alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right\}, \quad \text{para } \alpha_{j-1} \leq x < \alpha_j, \quad (1)$$

$n \in \mathbb{N}$, $x(0) \in [-1, 1[$ com $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ sendo números reais e $\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{r-1} < \alpha_r = 1$. A cada α_j , associa-se um $\beta_j \in \{-1, 1\}$, $1 \leq j \leq r$. Para facilitar a notação, define-se os vetores coluna r -dimensional $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$ e $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_r]^T$ [1].

No CSK binário, para um único mapa, utilizam-se trechos de N_b pontos de um sinal caótico $x(n)$ para transmitir um símbolo binário. Considera-se a transmissão de uma mensagem digital, por meio de uma sequência binária equiprovável $a_j = \{c, d\}$ com $j = 0, 1, 2, \dots$. Assim, define-se a mensagem $m(n)$ como $m(n) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Pi(n - jN_b)$ em que, a função porta $\Pi(n)$ é dada por $\Pi(n) = u(n) - u(n - N_b)$, com $u(n)$ sendo a função degrau unitário. Assim, o CSK resulta em

$$s(n) = x(n)m(n). \quad (2)$$

Na Fig. 1(a) tem-se um trecho de uma mensagem transmitida correspondente a sequência de símbolos $\{1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1\}$ utilizando-se o mapa $f(\cdot)$ com parâmetros $\alpha_1 \triangleq \alpha$ e $\boldsymbol{\beta} = [1 \ 1]^T$ para modulação CSK. A modulação por comutação liga-desliga caótica (COOK - *Chaos On-Off Keying*) é um caso particular da modulação CSK, para ela os níveis do sinal digital são $c = 1$ e $d = 0$. Na Fig. 1(b) mostra-se uma mensagem transmitida correspondente à sequência de símbolos $\{1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0\}$ para modulação COOK, utiliza-se o mesma família de mapas da Fig. 1(a).

A DEP da modulação CSK é obtida calculando-se a Sequência de Autocorrelação (SAC) de (2), ou seja, $R(k) = \mathbb{E}[s(n)s(n+k)]$ sendo $\mathbb{E}[\cdot]$ o valor esperado [2], em seguida, toma-se a transformada de Fourier de tempo discreto da SAC. Assim,

$$S(\omega) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{N_b-1} \left[\lambda^2 \left(1 - \frac{k}{N_b} \right) + \mu^2 \right] \psi^k \cos(k\omega) - \frac{1}{3}, \quad (3)$$

¹rcosta@lcs.poli.usp.br,marcioft@usp.br

2

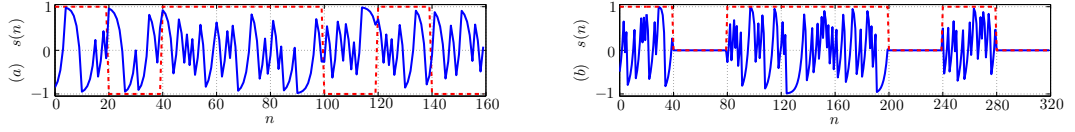


Figura 1: Trechos das Modulações (a) CSK com $N_b = 20$ e $\alpha = 0.05$ e (b) COOK com $N_b = 40$ e $\alpha = 0.35$.

em que $\lambda = \frac{c-d}{2}$, $\mu = \frac{c+d}{2}$ é o valor médio, $\psi = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r \beta_j (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2$ é um parâmetro da SAC do mapa $f(\cdot)$ em função de α e β [1].

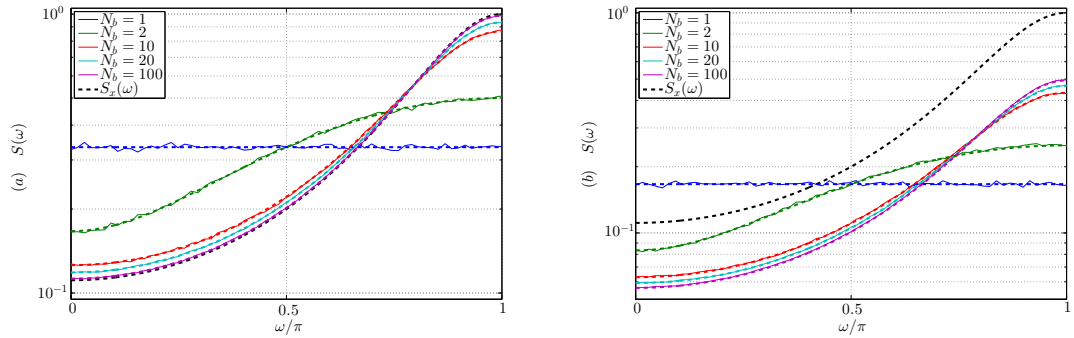


Figura 2: (a) DEP das Modulações (a) CSK e (b) COOK para alguns valores de N_b e $\alpha = -0.5$.

Nas Figuras 2(a) e (b) são mostradas, respectivamente, a DEP da modulação CSK e COOK para o mapa $f(\cdot)$ com parâmetros $\alpha_1 \triangleq \alpha$ e $\beta = [1 \ -1]^T$ em que $S_x(\omega)$ é a DEP do mapa linear por partes [1] (resultados teóricos em linha tracejada e numéricos em linha contínua). Nota-se que quando $N_b = 1$ a DEP das modulações é plana, e para outros valores de N_b , a DEP concentra-se nas altas frequências. Além disso, a DEP dos sinais modulados COOK são idênticas às da modulação CSK, havendo apenas atenuação de $1/2$. Como continuação desse trabalho pretende-se estender o estudo para outras modulações digitais que utilizam sinais caóticos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. M.E. foi parcialmente financiado por CNPq 311039/2019-7.

Referências

- [1] R. A. da Costa and M. Eisenkraft. Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 72:441–448, jun 2019.
- [2] M. Eisenkraft, R. R. F. Attux, and R. Suyama, editors. *Chaotic Signals in Digital Communications (Electrical Engineering & Applied Signal Processing Series)*. CRC Press, 2013.