Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Equação de Transporte de Nêutrons em Geometria Cilíndrica com Anisotropia Linear

Luana Lazzari[1]
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, UFPEL, Pelotas, RS
Glênio Aguiar Gonçalves[2]
Claudio Zen Petersen[3]
Instituto de Física e Matemática-Departamento de Matemática e Estatística, UFPEL, Pelotas, RS
Fernanda Tumelero[4]
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo Apresenta-se neste trabalho a construção do termo de anisotropia linear para a equação de transporte de nêutrons desenvolvida por Mitsis para um cilindro infinito com simetria azimutal, espalhamento isotrópico, fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno. A construção do termo de espalhamento é baseada na hipótese de que a solução deste problema deve ser composta pelos mesmos autovalores determinados por Case para um problema em geometria cartesiana unidimensional com anisotropia linear. Determina-se a solução deste problema aplicando o método HTS_N, o qual consiste na aplicação conjunta do método S_N com a transformada de *Hankel* de ordem zero, e compara-se os resultados para o problema em geometria cilíndrica com o problema em geometria cartesiana.

Palavras-chave. Equação de Transporte de Nêutrons, Anisotropia Linear, Método HTS_N

1 Introdução

Este trabalho tem como base a equação de transporte de nêutrons desenvolvida por Mitsis [1] para um cilindro infinito com simetria azimutal e espalhamento isotrópico. Posteriormente Siewrt e Thomas [2] incluíram a essa equação o termo de fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno. Em Gonçalves [3] soluciona-se este problema através do método HTS_N. Este método consiste em aplicar o método S_N para a discretização da variável angular e na sequência a transformada de *Hankel* de ordem zero para resolver o sistema de equações diferenciais resultante.

Propõe-se neste trabalho adicionar o termo de espalhamento linearmente anisotrópico à equação de Mitsis. A construção deste termo de espalhamento baseia-se na hipótese de que os autovalores positivos que compõem sua solução são idênticos aos determinados por

[1]luana-lazzari@hotmail.com
[2]gleniogoncalves@yahoo.com.br
[3]claudiopetersen@yahoo.com.br
[4]fernanda.tumelero@yahoo.com.br

Case [4] para um problema unidimensional em geometria cartesiana em um meio infinito e mesmo grau de anisotropia. A solução desta equação é obtida através do método HTS_N. Por fim, compara-se os resultados do problema em geometria cilíndrica com o problema em geometria cartesiana com anisotropia linear. Para tal, considera-se que o comprimento da placa e do raio do cilindro são grandes em comparação ao livre caminho médio.

2 Metodologia

A equação de transporte de nêutrons desenvolvida por Mitsis [1] para um cilindro infinito com simetria azimutal e espalhamento isotrópico é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{\mu^2}\right)\Phi(r,\mu)=-c\int_0^1\Phi(r,\mu')\frac{\mathrm{d}\mu'}{\mu'^2}, \tag{1}$$

sendo r a variável radial, μ a pseudovariável angular que define a direção de propagação do fluxo, Φ pseudofluxo angular e c o número médio de nêutrons que emergem por colisão.

Com base na equação (1), propõem-se neste trabalho adicionar a esta equação o termo de anisotropia linear. Este termo é definido a partir da hipótese de que a solução deste problema deve ser composta pelos mesmos autovalores determinados por Case [4] para a equação de transporte de nêutrons unidimensional em geometria cartesiana em um meio infinito com anisotropia linear. Assim a equação (1) é expressa por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{\mu^2}\right)\Phi(r,\mu)=-(c+3cf_1\mu^2(1-c))\int_0^1\Phi(r,\mu')\frac{\mathrm{d}\mu'}{\mu'^2}, \tag{2}$$

onde cf_1 é a seção de choque de espalhamento do termo de anisotropia linear.

Verifica-se a hipótese de construção do termo de anisotropia linear resolvendo a equação (2) pelo método de derivação angular [3]. Este método consiste em derivar a equação um número suficiente de vezes com relação a variável angular até obter uma equação diferencial, na sequência, soluciona-se esta equação e substitui-se seu resultado na equação original. Assim, derivando a equação (2) três vezes em relação a variável μ e solucionando a equação diferencial pelo método de separação de variáveis, obtém-se a autofunção,

$$\Phi(r,\mu)_\nu=\frac{\mu^2\nu^2(c+3cf_1(1-c)\mu^2)}{\nu^2-\mu^2}I_0\left(\frac{r}{\nu}\right)+\lambda(\nu)\delta(\nu-\mu). \tag{3}$$

onde I_0 é uma função de Bessel modificada do primeiro tipo e ordem zero. Com base no trabalho de Case [4] adicionou-se à autofunção (3) o termo $\lambda(\nu)\delta(\nu-\mu)$ onde $\lambda(\nu)$ é uma função arbitrária e $\delta(\nu-\mu)$ é a função delta de Dirac. Este termo permite considerar a possibilidade de $\nu=\mu$, isto é $\nu\in(-1,1)$.

Substituindo a componente angular da solução (3) na normalização da variável angular $\int_0^1\Phi_\nu(\mu)\frac{d\mu}{\mu^2}=1$ e resolvendo a integral, obtém-se os autovalores da equação (2) dados por:

$$\lambda(\nu)=\frac{\nu}{2}(3(1-c)cf_1\nu^2+c)\ln\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right)-3(1-c)cf_1-1, \tag{4}$$

os quais são idênticos aos autovalores determinados por Case [4] para um problema em geometria cartesiana unidimensional com anisotropia linear. Isto pode ser verificado a partir da componente angular da autofunção para o caso anisotrópico determinado por Case [4] e expressa por:

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2(\nu-\mu)} \sum_{l=0}^{N} (2l+1) f_l \phi_{\nu l} P_l(\mu), \tag{5}$$

onde $P_l(\mu)$ são polinômios de Legendre, f_l são os coeficientes da expansão e $\phi_{\nu l}$ é uma função definida por $\int_{-1}^{1} P_l(\mu)\phi_\nu(\mu)\mathrm{d}\mu \equiv \phi_{\nu l}$.

Considerando $l = 1$ na equação (5), caso linearmente anisotrópico, tem-se que os polinômios de Legendre são $P_0(\mu) = 1$ e $P_1(\mu) = \mu$ e as funções $\phi_{\nu l}$ são $\phi_{\nu 0} = 1$ e $\phi_{\nu 1} = \nu(1-c)$. Assim a equação (5) para o caso linearmente anisotrópico é dada por:

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2(\nu-\mu)} \left(1 + 3f_1\mu\nu(1-c)\right). \tag{6}$$

Substituindo a equação (6) na normalização da componente angular $\int_{-1}^{1} \phi_\nu(\mu)\mathrm{d}\mu = 1$ obtém-se os autovalores para o problema em geometria cartesiana unidimensional com anisotropia linear de Case [4]. Estes autovalores são idênticos aos apresentados em (4).

Com base no trabalho de Siewent e Thomas [2] adiciona-se à equação (2) os termos fonte externa isotrópica, $Q(r)$, e fluxo incidente constante no contorno, F. Assim tem-se,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2}\right)\Phi(r,\mu) = -(c + 3cf_1(1-c)\mu^2)\int_0^1 \Phi(r,\mu')\frac{\mathrm{d}\mu'}{\mu'^2} \\ +(1-c)(Q(r)-F),\end{aligned} \tag{7}$$

sendo F definido por $\psi(R,\mu,\varphi) = F/4\pi$, no domínio, $\mu \in [-1,1]$ e $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

A equação (7) é definida para o pseudofluxo angular porém como este não possui sentido físico define-se o fluxo escalar como

$$\psi(r) = \int_0^1 \Phi(r,\mu)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^2} + F. \tag{8}$$

A equação (1) esta sujeita à condição de contorno de superfície livre dada por:

$$K_1\left(\frac{R}{\mu}\right)\Phi(R,\mu) + 2DK_0\left(\frac{R}{\mu}\right)\left.\frac{\partial\Phi(r,\mu)}{\partial r}\right|_{r=R} = 0, \tag{9}$$

onde K_0 e K_1 são funções de Bessel modificadas do segundo tipo e ordem zero e um respectivamente, R é o raio do cilindro e $2D = -\mu(3\nu^2(1-c)cf_1 + 1)$.

Para solucionar a equação (7) aplica-se o método HTS_N [3]. Este método consiste na aplicação do método S_N juntamente com a transformada de *Hankel* de ordem zero. O método S_N faz uso da quadratura Gaussiana para a aproximação do termo integral e a partir disso utiliza-se o método de colocação, tomando as $N/2$ raízes positivas do polinômio de Legendre de ordem N como pontos de colocação. Ao aplicar este método na equação (7) tem-se,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu_j^2}\right)\Phi_j(r) = -(c + 3cf_1\mu_j^2(1-c))\sum_{i=1}^{N/2} w_i \frac{\Phi_i(r)}{\mu_i^2} - (1-c)[S(r)], \tag{10}$$

onde $\Phi_j(r) = \Phi(\mu_j, r)$, μ_i são as raízes positivas do polinômio de Legendre de ordem N, w_i são os pesos gerados pela quadratura Gauss-Legendre e $S(r) = Q(r) - F$. Como a equação diferencial (10) é não-homogênea sua solução é dada pela soma da solução particular com a solução homogênea.

Determina-se a solução particular da equação (10) aplicando a transformada de *Hankel* de ordem zero. Assim tem-se,

$$\left(-\xi^2 - \frac{1}{\mu_j^2}\right)\bar{\Phi}_j(\xi) = -(c + 3cf_1\mu_j^2(1-c))\sum_{i=1}^{N/2} w_i \frac{\bar{\Phi}_i(\xi)}{\mu_i^2} - (1-c)[\bar{S}(\xi)], \tag{11}$$

onde $\bar{S}$ e $\bar{\Phi}(\xi)$ são a transformada de *Hankel* de ordem zero de S e $\Phi(r)$ respectivamente.

Reescrevendo a equação (11) na forma matricial têm-se,

$$\left(\xi^2 I + A\right)\bar{\Phi}(\xi) = (1-c)[\bar{S}(\xi)], \tag{12}$$

sendo $\bar{\Phi}(\xi)$ a matriz do fluxo transformado, I a matriz identidade e A é uma matriz de ordem $N/2 \times N/2$ cujos elementos são,

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{-(c+3cf_1\mu_i^2(1-c))w_i}{\mu_i^2} & \Rightarrow j \neq i \\ \frac{(1-(c+3cf_1\mu_i^2(1-c))w_i)}{\mu_i^2} & \Rightarrow j = i. \end{cases} \tag{13}$$

Se a matriz A for diagonalizada na forma $A = UDU^{-1}$ com U uma matriz dos autovetores e D uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores da matriz A, pode-se escrever o fluxo transformado como,

$$\bar{\Phi}(\xi) = U(\xi^2 I + D)^{-1}U^{-1}(1-c)[\bar{S}(\xi)]. \tag{14}$$

Tomando o j-ésimo elemento da solução (14) dado por:

$$\bar{\Phi}_j(\xi) = (1-c)\sum_{i,k}^{N/2} \frac{u_{jk}\nu_{ki}}{\xi^2 + \lambda_k}[\bar{S}(\xi)], \tag{15}$$

onde u_{jk} e ν_{ki} são os elementos das matrizes U e U^{-1} respectivamente e λ_k são os autovalores da matriz A e aplicando a inversa da transformada de *Hankel* de ordem zero obtém-se a solução particular da equação (10)

$$\Phi_j(r) = (1-c)\sum_{i,k}^{N/2} u_{jk}\nu_{ki}$$
$$\left\{K_0(\alpha_k r)\int_0^r r' I_0(\alpha_k r')S(r')\mathrm{d}r' + I_0(\alpha_k r)\int_r^R r' K_0(\alpha_k r')S(r')\mathrm{d}r'\right\}, \tag{16}$$

onde α_k é a raiz quadradade λ_k.

A solução homogênea da equação (10) é obtida considerando sua parte homogênea, que na forma matricial é escrita da forma,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi(r) - A\Phi(r) = 0, \tag{17}$$

onde $\Phi(r)$ é o vertor do pseudofluxo angular.

Solucionado a equação (17) obtém-se,

$$\Phi(r) = UBI_0(\alpha r), \tag{18}$$

onde B é uma matriz diagonal dos coeficientes.

Tomando o j-ésimo elemento da equação (18) tem-se a solução homogênea da equação (10) dada por:

$$\Phi_j(r) = \sum_{k}^{N/2} u_{jk} I_0(\alpha_k r) B_{kk}. \tag{19}$$

Portanto a solução da equação (10) é dada pela soma da solução particular (16) com a solução homogênea (19).

Aplicando a condição de contorno (9) na solução geral, constitui-se um sistema de equações algébricas dado por:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=l}^{N/2} u_{jk}\left[2D\alpha_k K_0(R/\mu_j) I_l(\alpha_k R) + K_l(R/\mu_j) I_0(\alpha_k R)\right] B_{kk} = \\ &(c-1)\sum_{i,k}^{N/2} u_{jk}\nu_{ki}\left[2D\alpha_k K_0(R/\mu_j) K_l(\alpha_k R)\int_0^R r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr'\right] \\ &-(c-1)\sum_{i,k}^{N/2} u_{jk}\nu_{ki}\left[K_1(R/\mu_j) K_0(\alpha_k R)\int_0^R r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr'\right] \end{aligned} \tag{20}$$

onde $2D = -\mu_j(3\nu^2(1-c)cf_1 + 1)$. Este sistema possibilita a definição dos coeficientes B_{kk} e permite determinar o pseudofluxo angular.

3 Resultados numéricos

Apresenta-se a seguir a comparação entre o problema em geometria cilíndrica e o problema em geometria cartesiana com anisotropia linear. Para esta proposta considera-se que o comprimento da placa, L, e do raio do cilindro, R, são grandes em comparação ao livre caminho médio (lcm) para que assim os resultados dos problemas sejam equivalentes. Assim para obter os resultados numéricos considera-se $L = R = 100000$ com condição de contorno dada em (9) e ordem de quadratura $N = 50$. Os resultados do problema em geometria cartesiana foram obtidos pelo método LTS_N, o qual consiste na aplicação do método S_N juntamente com a transformada de Laplace.

Para verificar a diferença entre os resultados do problema em geometria cartesiana e cilíndrica calcula-se a diferença percentual dada por:

$$\text{Diferença percentual (DP)} = \left|\frac{\text{Fluxo Cartesiano} - \text{Fluxo Cilíndrico}}{\text{Fluxo Cartesiano}}\right| * 100. \qquad (21)$$

Problema 1

Neste problema consideram-se o número médio de nêutrons que emergem por colisão e a seção de choque do termo de anisotropia linear dadas por $c = 0,99$ e $cf_1 = 0,8$ respectivamente. No caso 1 (C1) toma-se o fluxo incidente constante no contorno $F = 1/4\pi$ e termo fonte externa isotrópica $Q = 0$ e no caso 2 (C2) toma-se $F = 0$ e $Q = 1$.

Tabela 1: Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana.

Posição	C1-Cil.	C1-Cart.	DP	C2-Cil.	C2-Cart.	DP
99990	4,5450	4,5270	0,40	63,8321	63,9755	0,22
99991	4,9095	4,8901	0,40	60,9312	61,0861	0,25
99992	5,3033	5,2823	0,40	57,7977	57,9650	0,29
99993	5,7287	5,7059	0,40	54,4127	54,5935	0,33
99994	6,1882	6,1636	0,40	50,7561	50,9513	0,38
99995	6,6846	6,6581	0,40	46,8054	47,0161	0,45
99996	7,2212	7,1927	0,40	42,5351	42,7625	0,53
99997	7,8022	7,7715	0,39	37,9122	38,1567	0,64
99998	8,4351	8,4025	0,39	32,8754	33,1346	0,80
99999	9,1474	9,1150	0,35	27,2073	27,4648	0,94
100000	10,3470	10,3420	0,05	17,6611	17,7009	0,22

Problema 2

Neste problema consideram-se o número médio de nêutrons que emergem por colisão e a seção de choque do termo de anisotropia linear dadas por $c = 0,7$ e $cf_1 = 0,6$ respectivamente. No caso 1 (C1) toma-se o fluxo incidente constante no contorno $F = 1/4\pi$ e termo fonte externa isotrópica $Q = 0$ e no caso 2 (C2) toma-se $F = 0$ e $Q = 1$.

4 Conclusões

Este trabalho tem como principal resultado a construção do termo de anisotropia linear, o qual reapresenta uma melhor aproximação do termo de espalhamento, para a equação do

Tabela 2: Fluxo escalar para os problemas em geometria cilíndrica e cartesiana.

Posição	C1-Cil.	C1-Cart.	DP	C2-Cil.	C2-Cart.	DP
99990	2,5022E-002	2,3555E-002	6,23	3,3267	3,3267	0,01
99991	4,2699E-002	4,0196E-002	6,23	3,3220	3,3227	0,02
99992	7,2869E-002	6,8600E-002	6,22	3,3140	3,3151	0,03
99993	1,2437E-001	1,1709E-001	6,21	3,3003	3,3023	0,06
99994	2,1232E-001	1,9993E-001	6,20	3,2770	3,2803	0,10
99995	3,6265E-001	3,4157E-001	6,20	3,2371	3,2427	0,17
99996	6,2005E-001	5,8435E-001	6,10	3,1688	3,1783	0,30
99997	1,0627	1,0029	5,96	3,0514	3,0673	0,52
99998	1,8328	1,7356	5,60	2,8472	2,8729	0,90
99999	3,2262	3,0880	4,80	2,4775	2,5142	1,46
100000	6,7925	7,0045	3,02	1,5316	1,4754	3,81

transporte de nêutrons desenvolvido por Mitsis considerando os termos de fonte externa isotrópica e fluxo incidente constante no contorno.

Verifica-se que os resultados numéricos do problema em geometria cilíndrica com anisotropia linear apresentam boa concordância com os do problema em geometria cartesiana para o mesmo grau de anisotropia. Percebe-se ainda que a menor diferença percentual ocorre no problema 1 onde considera-se c próximo a 1 como mostra a Tabela 1.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece à Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) e o segundo autor à Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) pelo apoio financeiro para o desenvolvimento das atividades científicas.

Referências

[1] G. J. Mitsis. *Tranport Solutions to the Monoenergetic Critical Problems.* Tese de doutorado, Argonne National Laboratory University of Chicago, Chicago, 1963.

[2] C. E. Siewert and J. R. Jr. Thomas. Neutron transport calculations in cylindrical geometry. *Nuclear Science and Engineering*, 87:107–112, 1984.

[3] G. A. Gonçalves. *Solução Analítica da Equação do Transporte de Partículas Neutra em Geometria Cartesiana e Cilíndrica.* Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia (Promec) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/ Rs, Dezembro 2003.

[4] K. M. Case and P. F. Zweifel. *Linear Transport Theory.* Addison-Wesley, 1967.

