

Inferência e Correção de Vício em Filas Markovianas Infinitas e Servidor Único

Márcio A. C. Almeida¹

Pró-Reitoria de Planejamento e Desenvolvimento, UFPA, Belém, PA

Frederico R. B. Cruz²

Departamento de Estatística - ICEX - UFMG, Belo Horizonte, MG

Fernando L. P. Oliveira³

Departamento de Estatística - ICEB - UFOP, Ouro Preto, MG

Resumo. Diversas são as situações do nosso dia a dia em que as filas de espera estão presentes, incluindo na lanchonete, no supermercado, no banco, no posto de gasolina e assim por diante. O desempenho das filas pode ser descrito por várias medidas. Neste artigo é dado foco às estimativas da intensidade do tráfego (ρ), também denominado fator de utilização da estação de serviço, do número esperado de clientes no sistema (L) e do tamanho médio da fila (L_q), para o caso de filas $M/M/1$, que, na notação de Kendall, representa filas com tempos entre chegadas e de serviço exponenciais (markovianos), servidor único e capacidade de espera infinita. Os experimentos computacionais confirmam o vício dos estimadores de máxima verossimilhança para amostras pequenas e moderadas ($n < 50$). Assim, uma versão corrigida pelo método *bootstrap* não paramétrico é analisada, mostrando que com um esforço computacional extra o pesquisador pode alcançar, com amostras pequenas, de tamanho $n = 10$, estimativas com erro médio equivalente àquelas com amostras de tamanho $n = 200$, sem correção. Esta redução pode ser bastante importante em aplicações práticas, pela redução nos custos de estimação das medidas de desempenho da fila.

Palavras-chave: Filas markovianas, Desempenho, Inferência, Vício, *Bootstrap*.

1 Introdução

As filas de espera estão muito presentes no nosso dia a dia, em situações tais como na lanchonete, no supermercado, no banco e no posto de gasolina. Comum a todos esses casos é que as filas ocorrem quando a procura por um determinado serviço e a capacidade do sistema de prover este serviço tem alguma variabilidade. Conforme Wagner [1], um sistema de filas pode ser caracterizado pelo seu processo de chegada e de saída, a disciplina da fila, seu mecanismo de serviço, entre outros aspectos. Essas características estão presentes em todos os sistemas de filas e são muito importantes para analisarmos cada tipo de fila.

Várias são as medidas que podem atestar o desempenho de um sistema de filas. Neste artigo daremos foco à estimativa da intensidade do tráfego (ρ), às vezes chamado de fator

¹estatimarcio@gmail.com

²fcruz@est.ufmg.br

³fernandoluiz@iceb.ufop.br

de utilização da estação de serviço, do número esperado de clientes no sistema (L) e do tamanho médio da fila (L_q), para o caso de filas $M/M/1$, que, na notação de Kendall [2], representa filas com tempos entre chegadas exponenciais (markoviano), tempos de serviço também exponenciais, servidor único e área de espera infinita.

Este artigo está organizado com se segue. Na Seção 2 é apresentada a metodologia utilizada. Os resultados computacionais e sua análise são discutidos na Seção 3. Finalmente, a Seção 4 encerra o artigo com conclusões finais e tópicos para futuras pesquisas na área.

2 Metodologia

2.1 Filas $M/M/1$

As filas $M/M/1$, apesar de serem as mais simples do ponto de vista matemático, estão entre aquelas com mais aplicações na prática. Elas aproximam diversas situações reais e são a base de modelos mais complexos. Segundo a notação de Kendall [2], são filas com:

- densidade exponencial para os tempos entre chegadas, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$,
 - densidade exponencial para os tempos de serviço, $g(t) = \mu e^{-\mu t}$, $t \geq 0$.
- (1)

Assumindo que o sistema de filas atinge um regime estacionário, isto é, que ele foi observado após um prolongado período de funcionamento, pode-se calcular a intensidade de tráfego ρ , definido como:

$$\rho \equiv \frac{\lambda}{\mu}, \tag{2}$$

que, para garantir que o sistema atinge o equilíbrio (isto é, a fila não cresce indefinidamente), deve obedecer a $\rho < 1$, e, associada a esta intensidade de tráfego, pode-se encontrar uma distribuição de probabilidade geométrica para o número de clientes no sistema no momento da partida, M , que, após o equilíbrio, pode ser escrita como:

$$P(M = m) = \begin{cases} \rho^m (1 - \rho), & m = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3}$$

A partir da Eq. (3), importantes características de desempenho podem ser encontradas em função de ρ , tais como a probabilidade de servidor ocioso, $P(M = 0) = 1 - \rho$, número esperado de clientes no sistema, $L \equiv E(M) = \rho / (1 - \rho)$, e o tamanho médio da fila, $L_q = \rho^2 / (1 - \rho)$. Da Lei de Little [3], também podem ser definidos o tempo esperado no sistema, $W = L / \lambda$, e o tempo médio na fila, $W_q = L_q / \lambda$. Entretanto, cabe ressaltar que neste artigo, o foco recairá no estudo dos estimadores para ρ , L e L_q .

2.2 Estimador de Máxima Verossimilhança para ρ

Para obtenção de uma estimativa para ρ , baseada em uma amostra \mathbf{X} de tamanho n , pode-se utilizar a Eq. (3) e a seguinte função de verossimilhança pode ser definida:

$$L(\rho, \mathbf{X}) = (1 - \rho)^n \rho^y, \tag{4}$$

em que $y = \sum_{i=1}^n x_i$. Derivando-se a Eq. (4) e igualando a zero, encontra-se o estimador de máxima verossimilhança (EMV) para ρ :

$$\hat{\rho} = \frac{y}{n + y}. \tag{5}$$

Uma das característica mais atrativas do método de máxima verossimilhança é sua *invariância* a transformações [4]. Ou seja, se $\hat{\theta}$ é o EMV de θ e $\alpha = h(\theta)$ é uma função de θ , então $\hat{\alpha} = h(\hat{\theta})$ é o EMV de α . Desta forma, são os seguinte os EMV para o número esperado de clientes e tamanho médio da fila, respectivamente:

$$\hat{L} = \frac{\hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}}, \tag{6}$$

e

$$\hat{L}_q = \frac{\hat{\rho}^2}{1 - \hat{\rho}}. \tag{7}$$

2.3 Correção *Bootstrap* de Vício

Um método utilizado para correção de vício em estimadores é o *bootstrap* [5]. Na sua versão não paramétrica, para estimar o vício de um parâmetro de interesse, β , diversas reamostragens (com reposição) são realizadas (usualmente, em torno de 1.000) e o parâmetro é reestimado após cada reamostragem. Tira-se então a média de tais estimativas, $\hat{\beta}_{(\bullet)}$. O vício pode então ser estimado da seguinte forma:

$$\text{vício} = \hat{\beta}_{(\bullet)} - \hat{\beta}. \tag{8}$$

Uma versão corrigida do estimador, pelo método *bootstrap* não paramétrico, pode ser obtida por:

$$\tilde{\beta}_B = 2\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(\bullet)}. \tag{9}$$

Este método foi usado por diversos pesquisadores no passado, com resultados bastante satisfatórios em correção de vício [6], construção de intervalos de confiança [7], entre outros. A seguir, são apresentados resultados computacionais e as principais conclusões obtidas.

3 Resultados e Discussão

Todos os cálculos dos estimadores descritos na Seção 2 foram realizados via *scripts* escritos no ambiente R [8] e estão disponíveis a pedido. Foram realizadas simulações de amostras com intensidades de tráfego $\rho \in \{0,01; 0,10; 0,20; 0,50; 0,90; 0,99\}$ e tamanhos $n \in \{10; 20; 50; 100; 200\}$. Para todos esses cenários, foram calculadas médias, para 10.000

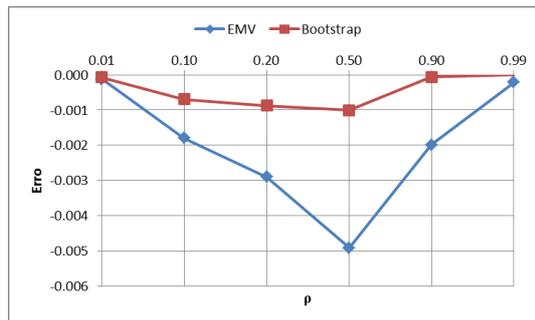
replicações Monte Carlo, das estimativas de ρ pelo EMV, Eq. (5), e pela sua versão corrigida via *bootstrap*, Eq. (9), para 1.000 reamostragens, com os respectivos erros padrão da média (EPM). Os resultados podem ser vistos na Tabela 1, que se encontram sintetizados na Figura 1.

Tabela 1: Estimativas médias de ρ e EPM (entre parênteses).

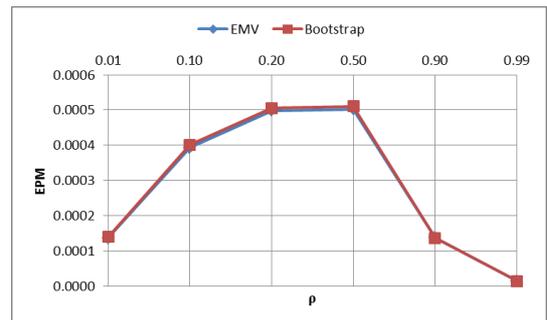
Estimador	ρ	n				
		10	20	50	100	200
EMV	0,01	0,00910 (0,00029)	0,00968 (0,00021)	0,00987 (0,00014)	0,00994 (0,00010)	0,01000 (0,00007)
	0,10	0,09279 (0,00084)	0,09668 (0,00062)	0,09820 (0,00039)	0,09940 (0,00028)	0,09953 (0,00020)
	0,20	0,18718 (0,00109)	0,19372 (0,00079)	0,19710 (0,00050)	0,19892 (0,00035)	0,19923 (0,00025)
	0,50	0,47665 (0,00116)	0,48838 (0,00081)	0,49509 (0,00050)	0,49801 (0,00035)	0,49868 (0,00025)
	0,90	0,88979 (0,00036)	0,89500 (0,00023)	0,89801 (0,00014)	0,89895 (0,00010)	0,89940 (0,00007)
	0,99	0,98887 (0,00004)	0,98945 (0,00002)	0,98978 (0,00001)	0,98990 (0,00001)	0,98994 (0,00001)
<i>bootstrap</i>	0,01	0,00992 (0,00031)	0,00970 (0,00022)	0,00993 (0,00014)	0,01011 (0,00010)	0,01005 (0,00007)
	0,10	0,09749 (0,00089)	0,09828 (0,00063)	0,09931 (0,00040)	0,09991 (0,00029)	0,09972 (0,00020)
	0,20	0,19527 (0,00114)	0,19688 (0,00081)	0,19912 (0,00051)	0,19956 (0,00036)	0,19981 (0,00026)
	0,50	0,49470 (0,00119)	0,49725 (0,00081)	0,49900 (0,00051)	0,49951 (0,00035)	0,49995 (0,00025)
	0,90	0,89909 (0,00034)	0,89959 (0,00022)	0,89994 (0,00014)	0,90007 (0,00010)	0,90003 (0,00007)
	0,99	0,98997 (0,00004)	0,99000 (0,00002)	0,99001 (0,00001)	0,99000 (0,00001)	0,99001 (0,00001)

Na Figura 1, encontram-se representados os erros de estimação médios e os EPM médios, em função da intensidade de tráfego ρ (média entre todos os tamanhos de amostra) e em função do tamanho da amostra n (média entre todas as intensidades de tráfego). Podemos confirmar o vício do EMV para ρ , para amostras pequenas e moderadas ($n \leq 50$) e intensidades de tráfego $\rho \approx 0,50$. Este comportamento é conhecido, uma vez que a distribuição envolvida é a geométrica clássica. Para valores extremos (i.e., $\rho \approx 0,01$ e $\rho \approx 0,99$), as estimativas são precisas, conforme visto nas Figuras 1-(a) e 1-(b), com baixos erros médios e também baixos EPM médios, o que sugere que estes são os valores que exigem menor esforço computacional para estimação. Também para amostras grandes ($n \geq 100$), o desempenho é melhor, conforme visto nas Figuras 1-(c) e 1-(d), que mostram pequenos valores para os erros médios e EPM médios. Portanto, as medidas de desempenho da fila que são estimadas a partir de um ρ com vício também deverão apresentar vício, o que deve ser uma preocupação para o pesquisador. Sobre o estimador corrigido via *bootstrap*, é suficiente dizer que ele apresenta sempre menores erros médios, sem inflação da variância, conforme constatado pela semelhança entre os EPM dos dois estimadores, EMV e *bootstrap*, Figuras 1-(b) e 1-(d).

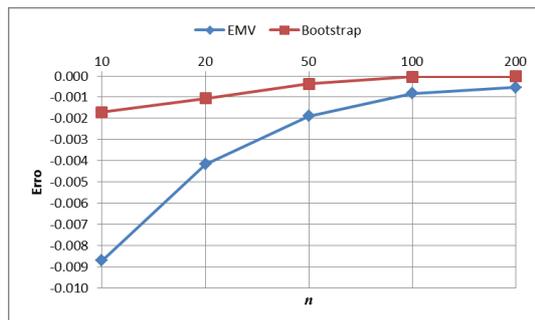
Também foram realizados experimentos computacionais para os estimadores de L , Eq. (6), e L_q , Eq. (7), bem como com suas versões corrigidas via *bootstrap*. São apresentados na Tabela 2 e na Figura 2 apenas os resultados obtidos para $L_q \in \{0, 5; 1; 2; 5; 10; 20\}$,



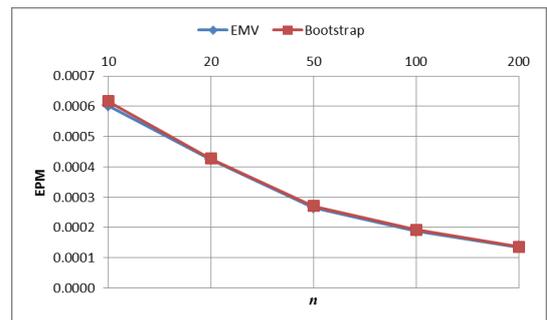
(a) erro médio em função de ρ



(b) EPM médio em função de ρ



(c) erro médio em função de n



(d) EPM médio em função de n

Figura 1: Desempenho dos estimadores para ρ .

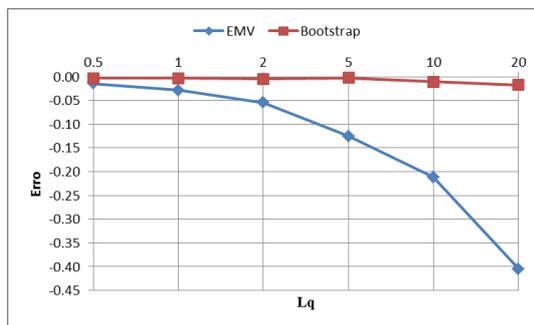
para tamanhos de amostras $n \in \{10; 20; 50; 100; 200\}$, 1.000 reamostragens *bootstrap* e 10.000 replicações Monte Carlo. Para L , os resultados (não apresentados) são semelhantes. É possível notar pelos resultados que, com o esforço computacional extra do método *bootstrap*, o pesquisador pode alcançar com amostras de tamanho $n = 10$ estimativas para L_q com mesmo erros médios que obteria com o EMV, para amostras de tamanho $n = 200$. Esta redução pode ser bastante importante do ponto de vista prático, pela diminuição que pode acarretar nos tempos para obtenção das amostras e nos custos de estimação.

4 Conclusões e Observações Finais

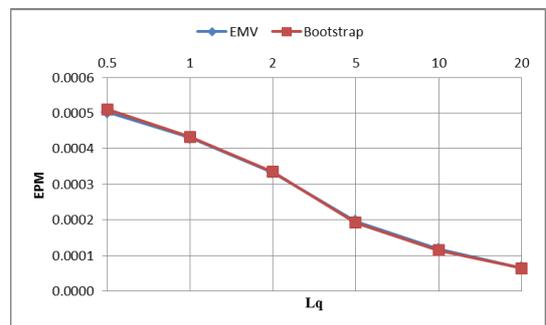
Dada a importância das filas no dia a dia das pessoas, este trabalho abordou o problema da estimação de algum dos seus parâmetros, a intensidade de tráfego, ρ , o número esperado de clientes no sistema, L , e o tamanho médio da fila, L_q . O foco foi o tipo mais simples de filas, $M/M/1$, com chegadas Poisson, tempos de serviço markovianos e servidor único, que é uma aproximação acurada para vários problemas práticos e base para modelos mais complexos e específicos. Foi constatada a presença de vício significativo no estimador de máxima verossimilhança de ρ , para valores próximos de 0,5, e foi investigada a utilização do método *bootstrap* não paramétrico para sua correção. Os resultados computacionais apresentados apontaram para uma correção efetiva do vício pelo *bootstrap*, sobretudo em amostras pequenas ($n \leq 20$), o que possibilita uma redução no seu tamanho, para fins de estimação, com conseqüente diminuição nos tempos e custos para sua obtenção.

Tabela 2: Estimativas médias de L_q e EPM (entre parênteses).

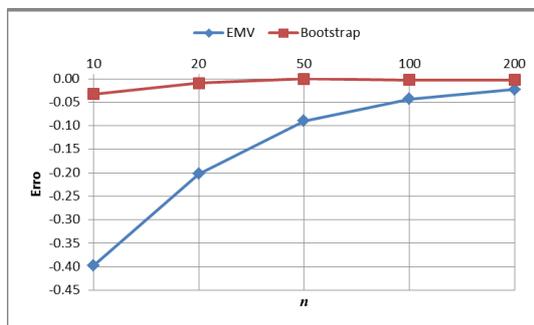
Estimador	L_q	n				
		10	20	50	100	200
EMV	0,5	0,43411 (0,00116)	0,46619 (0,00081)	0,48546 (0,00050)	0,49406 (0,00035)	0,49605 (0,00025)
	1	0,87197 (0,00102)	0,93441 (0,00070)	0,97168 (0,00043)	0,98821 (0,00030)	0,99246 (0,00021)
	2	1,75143 (0,00082)	1,87568 (0,00055)	1,94550 (0,00033)	1,97572 (0,00023)	1,98579 (0,00016)
	5	4,45302 (0,00049)	4,71935 (0,00032)	4,87472 (0,00020)	4,93802 (0,00014)	4,96822 (0,00009)
	10	8,92303 (0,00031)	9,45755 (0,00019)	9,78838 (0,00012)	9,88343 (0,00008)	9,93151 (0,00006)
	20	17,96563 (0,00017)	18,96589 (0,00011)	19,59511 (0,00006)	19,78940 (0,00005)	19,90578 (0,00003)
bootstrap	0,5	0,48431 (0,00119)	0,49181 (0,00081)	0,49700 (0,00051)	0,49854 (0,00035)	0,49985 (0,00025)
	1	0,97472 (0,00103)	0,98885 (0,00070)	0,99747 (0,00043)	0,99701 (0,00030)	1,00073 (0,00021)
	2	1,96776 (0,00080)	1,99504 (0,00054)	1,99985 (0,00033)	2,00386 (0,00023)	1,99483 (0,00016)
	5	4,96641 (0,00048)	4,97319 (0,00032)	4,99995 (0,00019)	4,99733 (0,00014)	5,00092 (0,00010)
	10	9,93206 (0,00029)	9,98385 (0,00019)	10,02029 (0,00011)	9,99415 (0,00008)	9,98929 (0,00006)
	20	19,84954 (0,00016)	20,03573 (0,00010)	20,00104 (0,00006)	19,97931 (0,00005)	19,98261 (0,00003)



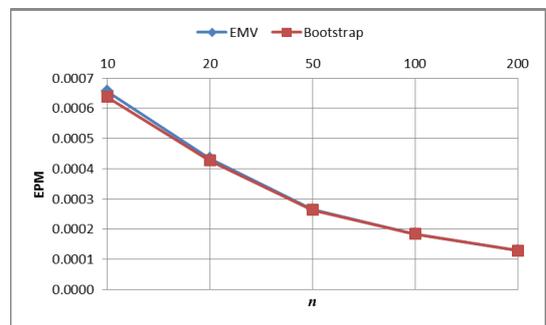
(a) erro médio em função de L_q



(b) EPM médio em função de L_q



(c) erro médio em função de n



(d) EPM médio em função de n

Figura 2: Desempenho dos estimadores para L_q .

Investigações futuras incluem a avaliação da qualidade da correção via *bootstrap* em outras medidas de desempenho da fila, tais como a probabilidade de servidor ocioso, $P(M = 0)$, o tempo esperado no sistema, W , e o tempo médio na fila, W_q , bem como a consideração, por exemplo, de estimadores bayesianos [9]. Também outros tipos de filas devem ser investigados, tais como filas markovianas finitas, $M/M/1/K$, filas markovianas infinitas multi-servidoras, $M/M/c$, e assim por diante.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e à FAPEMIG), pelo auxílio financeiro a esta pesquisa, bem como à UFOP e à UFPA.

Referências

- [1] H. M. Wagner. *Pesquisa Operacional*. Prentice-Hall do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 2^o ed., 1986.
- [2] D. G. Kendall. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains. *Annals Mathematical Statistics*, 24:338–354, 1953.
- [3] J. D. C. Little. A proof for the queuing formula: $L = \lambda W$. *Operations Research*, 9(3):383–387, 1961.
- [4] N. Mukhopadhyay. *Probability and Statistical Inference*. Marcel Dekker, New York, NY, 2000.
- [5] B. Efron & R. Tibshirani. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, London, UK, 1993.
- [6] F. R. B. Cruz, E. A. Colosimo, & J. MacGregor Smith. Sample size corrections for the maximum partial likelihood estimator. *Communications in Statistics - Simulation & Computation*, 33(1):35–47, 2004.
- [7] K. M. Domingues, F. L. P. Oliveira, F. R. B. Cruz, & L. F. Bessegato. Estimação de intervalos de confiança via reamostragem *bootstrap*. In *Anais do I Encontro Interacadêmico de Engenharia de Produção - EINEPro 2015*, São João da Barra, RJ, Brasil, 2015.
- [8] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2013.
- [9] M. A. C. Almeida & F. R. B. Cruz. Análise de desempenho em filas $M/M/1$ usando uma abordagem bayesiana, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 3, 2015. DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0057.