

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Solução da Equação de Condução de Calor Não Estacionária em Meios Multicompostos

Juliana Ávila Contreira, Daniela Buske, Régis Sperotto Quadros ¹

PPG em Modelagem Matemática, PPGMMat, UFPEL, Pelotas, RS

Guilherme Jahnecke Weymar, Marco Túllio Vilhena ²

PPG em Engenharia Mecânica, PROMEC, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Neste trabalho é desenvolvida uma metodologia totalmente analítica com a finalidade de calcular o fluxo de calor não-estacionário em paredes externas de edificações. Esta aplicação é de grande importância nos cálculos de carga térmica de ambientes com a finalidade de um dimensionamento adequado de sistemas de ar condicionado. Para tornar o modelo mais realista, utiliza-se uma parede composta por diferentes materiais para o estudo em questão. A distribuição de temperaturas no interior da parede é obtida resolvendo a equação diferencial parcial da difusão em sólidos através do método de separação de variáveis. O modelo foi aplicado para simular a transferência de calor em uma parede de vinte e cinco centímetros de espessura e composta por cinco camadas, apresentando resultados válidos para descrever o gradiente de temperaturas, tornando possível a análise em cada ponto do elemento.

Palavras-chave. Condução, Calor, Multicompostos, Solução analítica

1 Introdução

A insatisfação com o ambiente térmico pode ser causada pela sensação de desconforto por calor ou frio quando o balanço térmico não é estável, ou seja, quando há diferenças entre o calor produzido pelo corpo e o calor perdido para o ambiente. A performance humana, como atividades intelectuais, manuais e perceptivas, geralmente apresentam um melhor rendimento quando realizadas em um ambiente que propicie um conforto térmico. Ao conhecer as condições e os parâmetros relativos ao conforto térmico dos ocupantes do ambiente, evitam-se desperdícios com aquecimento e refrigeração, muitas vezes desnecessários. Para obter esse conhecimento, utiliza-se os modelos matemáticos, que são instrumentos particularmente úteis no entendimento dos fenômenos de condução e convecção. Dentre as opções de modelos matemáticos existentes, optou-se pela utilização de modelos analíticos, os quais apresentam grandes vantagens sob modelos numéricos, devido a obtenção de resultados mais exatos em um menor espaço de tempo, visto que para obtenção

¹julianacontreira@hotmail.com, danielabuske@gmail.com, quadros99@gmail.com

²guilhermejahnecke@gmail.com, mtmbvilhena@gmail.com

de soluções mais exatas é necessário a utilização de malhas muito finas (com muitos pontos) inviabilizando assim certas soluções e tornando tantas outras muito demoradas, além da necessidade de máquinas muito potentes para encontrar tais soluções. Na literatura encontram-se disponíveis inúmeros trabalhos que se concentram no estudo de problemas de difusão de calor em meios multicompostos, em que são utilizados como metodologias métodos numéricos, funções de transferência, métodos semi-analíticos e transformada de Laplace [1].

[2], desenvolveu uma metodologia semi-analítica para a solução de problemas de condução de calor bidimensional, não estacionária em meios multicompostos, combinando em sua metodologia os métodos nodal, com parâmetros concentrados, e a técnica da Transformada de Laplace.

[1], desenvolvem uma metodologia semi-analítica com a finalidade de calcular o fluxo de calor não estacionário em paredes externas multicompostas, em uma e duas direções. Para tanto, o problema diferencial em uma direção é transformado do domínio tempo para o domínio complexo s pela Transformada de Laplace, a equação resultante é trabalhada para encontrarem-se as constantes de integração, e o retorno para o domínio tempo é feito pela integral de inversão resolvida por Quadratura Gaussiana. Esta mesma metodologia é aplicada em duas direções.

Entretanto, a utilização de métodos totalmente analíticos para resolução deste problema são ainda escassas. Neste trabalho apresenta-se uma solução analítica que represente fielmente como ocorre a condução de calor em uma parede multicomposta, esta solução é possível através da resolução da equação diferencial da difusão do calor em sólidos pelo método de separação de variáveis. O sólido em questão representa uma parede externa, com a temperatura da face interior mantida constante, através de um ar condicionado e a temperatura da face externa variável, de acordo com a temperatura do ambiente no qual ela esta inserida.

2 Descrição e solução do problema

Neste trabalho pretende-se contribuir com uma avaliação mais precisa da troca de calor não-estacionário em paredes multicamadas externas de edificações, para esse fim o trabalho trata-se de uma técnica híbrida, que fornece uma solução analítica para a solução da distribuição de temperatura, e com a solução final é possível analisar a movimentação de cargas térmicas dentro da parede. A partir disso torna-se mais fácil a obtenção do fluxo de calor que entra em um ambiente condicionado, possibilitando assim o melhor dimensionamento da espessura e determinação do material de cada componente de uma parede multicomposta, além de proporcionar um uso adequado de aquecimento ou refrigeração nas construções.

A análise térmica consiste em determinar a distribuição unidimensional de temperatura no interior da parede estudada quando submetida a um carregamento térmico, este dimensionamento se dará através da Separação de Variáveis. Para isso é necessário determinar o valor da temperatura em cada elemento infinitesimal da parede.

Seja um elemento multicomposto, conforme representado na Figura 2, a parede é

composta por diversos meios, cada um representando um elemento construtivo, como reboco, chapisco, tijolo. O problema tem no lado esquerdo uma temperatura T_∞ , mantida constante, para que represente um ambiente submetido a um condicionamento de ar. No lado direito existe uma temperatura que será posteriormente analisada, e um coeficiente de convecção conhecido. Por sua vez, as camadas intermediárias são compostas por materiais diferentes, sendo que entre eles pode ou não existir contato térmico perfeito.

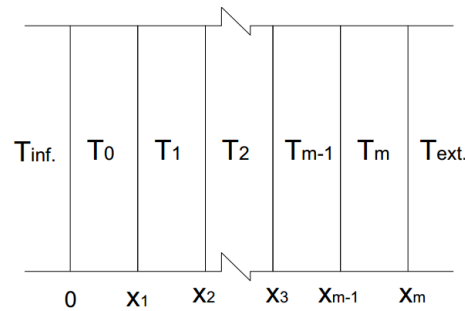


Figura 1: Superfície Multicomposta.

O problema proposto é representado matematicamente pelo seguinte conjunto recursivo de equações do calor:

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_0}{\partial t}, \quad \text{de } 0 < x < x_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_1}{\partial t} + T_0(x, t), \quad \text{de } x_1 < x < x_2, \quad (2)$$

$$\vdots \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 T_N}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_3} \frac{\partial T_N}{\partial t} + T_{N-1}(x, t), \quad \text{de } x_{m-1} < x < x_m. \quad (4)$$

onde T_0, T_1, \dots, T_N e $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ representam as temperaturas médias e os parâmetros de difusividade térmica nos intervalos $(0, x_1), (x_1, x_2), \dots$ e (x_{N-1}, x_N) , respectivamente.

Para resolver o problema proposto, o primeiro passo é calcular a distribuição de temperatura na primeira camada, através da equação abaixo:

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_0}{\partial t}. \quad (5)$$

A equação (5) está sujeita as condições de contorno e inicial representadas a seguir:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = K_1, \quad x = x_1, \quad (6)$$

$$T = T_\infty, \quad x = 0, \tag{7}$$

$$T(0, x) = T_p. \tag{8}$$

A resolução da equação (5), conforme as condições de contorno elencadas (6), (7), (8), consiste na separação em duas soluções: regime estacionário e regime transiente ($T_0(x, t) = T_s(x) + T_h(x, t)$). Inicialmente resolve-se o problema no regime estacionário, cuja solução é:

$$T_s(x) = T_\infty + K_1x. \tag{9}$$

Já a solução do regime transiente é obtida pelo método de separação de variáveis. Através do problema auxiliar de Sturm-Liouville:

$$\begin{aligned} \Psi_n''(x) + \beta_n^2 \Psi_n(x) &= 0, & 0 < x < x_1, \\ \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} &= K_1, & x = x_1, \\ \Psi(x) &= T_\infty, & x = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

que tem solução conhecida [3]:

$$\Psi_n(x) = \sin(\beta_n(x)) \text{ onde } \beta_n = \left(\frac{n + 1/2}{x_1}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \tag{11}$$

Para resolver a equação (5) inicialmente expande-se a temperatura em uma série truncada e utiliza-se como base as autofunções do problema de Sturm-Liouville (11), obtém-se:

$$T_h(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{T}(t) \Psi_n(x). \tag{12}$$

Substitui-se a equação (12) na equação (5), aplica-se o operador $\int_0^{x_1} (\cdot) \Psi_m(x) dx$ e utiliza-se $\beta_n^2 \Psi_n(x)$, resultando em:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{x_1} -\bar{T}(t) \beta_n^2 \Psi_n(x) \Psi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{x_1} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \Psi_n(x) \Psi_m(x) dx. \tag{13}$$

A equação (13) produz um conjunto de $m + 1$ equações diferenciais ordinárias, representadas por:

$$-\beta_m^2 \bar{T}(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}}{dt}, \tag{14}$$

que tem solução:

$$\bar{T} = C_2 e^{-\beta_m^2 \alpha t}, \tag{15}$$

sendo $C_2 = (T_p - T_\infty \cos(\beta_m x_1) + T_p - T_\infty - K_1 x_1 \cos(\beta_m x_1) + \sin(\beta_m x_1))$. A solução completa para a primeira camada da parede é representada pela soma da solução no regime estacionário com a solução no regime transiente:

$$T_0(x, t) = T_\infty + K_1x - \sum_{m=0}^{\infty} \left[T_p - T_\infty \cos(\beta_m x_1) + T_p - T_\infty - K_1 x_1 \cos(\beta_m x_1) + \sin(\beta_m x_1) \right] \sin(\beta_m x) e^{-\beta_m^2 \alpha t}. \tag{16}$$

Para a segunda camada da parede a equação que modela a distribuição de temperatura no intervalo entre x_1 e x_2 é:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_1}{\partial t} + T_0(x, t), \quad \text{com } x_1 < x < x_2. \quad (17)$$

A equação (17) está sujeita as seguintes condições de contorno e inicial:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = T_\infty, \quad x = x_1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = K_2, \quad x = x_2, \quad (19)$$

$$T(0, x) = T_p. \quad (20)$$

Para resolver a equação (17) sujeita as condições (18), (19), e (20) utiliza-se o Teorema de Duhamel [3], assim expressa-se $T_1(x, t)$ em termos da solução do problema auxiliar, representado a seguir:

$$\frac{\partial^2 \phi_1(x, t, \tau)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \phi_1(x, t, \tau)}{\partial t} + \phi_0(x, \tau), \quad (21)$$

condições de contorno da equação (21): $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = K_1$ e $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = K_2$.

O problema (21) é resolvido de forma análoga a equação (5), pois o termo T_0 não depende mais do tempo. E portanto, a solução final para a equação (17) é:

$$T_1(x, t) = T_P + \int_{\tau=0}^t \frac{\partial \Phi_1(x, t - \tau, \tau)}{\partial t} d\tau. \quad (22)$$

De forma semelhante, calcula-se a distribuição de temperatura nas camadas restantes.

3 Resultados

Para possível avaliação das equações obtidas neste trabalho, foi realizado um teste em uma parede multicomposta, utilizando os dados reais de uma parede de alvenaria apresentados na Tabela 2. Esta parede é composta por cinco camadas, sendo elas: 1. Emboço e chapisco; 2. Alvenaria; 3. Emboço e chapisco; 4. Argamassa colante; 5. Cerâmica e rejunte. Os parâmetros físicos dos materiais de cada camada foram extraídos de [4] e [5]. Considerando ainda, que a parede possui espessura de $0,25\text{ m}$, temperatura externa simulando um dia de verão, variando de 50°C a 20°C e temperatura interna constante, 21°C .

Com o auxílio do programa computacional FORTRAN 90 foram encontrados os valores das temperaturas nas diferentes profundidades do sólido, com uma variação de tempo de até 55 minutos. Como é possível observar na Tabela 2, as regiões próximas às faces do sólido se resfriam mais rapidamente que seu núcleo, o que é fisicamente coerente, pois retrata a maior dificuldade de dissipar o calor no núcleo do sólido, devido à baixa difusividade térmica do material, no caso um mal condutor de calor.

Tabela 1: Parâmetros termofísicos dos materiais de cada camada.

Características	Camada 1	Camada 2	Camada 3	Camada 4	Camada 5
$K(J/seg\ m^{\circ}C)$	1,40	1,40	1,40	0,65	2,00
$\rho(kg/m^3)$	2310	1790	2310	1680	2510
$s(J\ Kg^{\circ}C)$	1000	1000	1000	1000	920
$l(m)$	0,02	0,20	0,02	0,005	0,0065
$\alpha(m^2/seg)$	$6,06 \times 10^{-7}$	$7,82 \times 10^{-7}$	$6,06 \times 10^{-7}$	$3,869 \times 10^{-7}$	$8,66 \times 10^{-7}$

Tabela 2: Distribuição da temperatura no interior do sólido.

d	T inicial ($^{\circ}C$)	10min 1	20min 2	30min	40min	50min
0,00	21,00	21,00	21,000	21,000	21,000	21,000
0,01	22,16	22,16	22,160	22,129	22,159	22,155
0,05	26,80	26,80	26,799	26,789	26,785	26,738
0,10	32,60	32,60	32,597	32,542	32,338	31,979
0,15	38,40	38,40	38,170	37,243	35,991	34,716
0,20	44,20	43,55	38,750	35,187	32,778	31,047
0,25	50,00	20,00	20,120	20,200	20,280	20,360

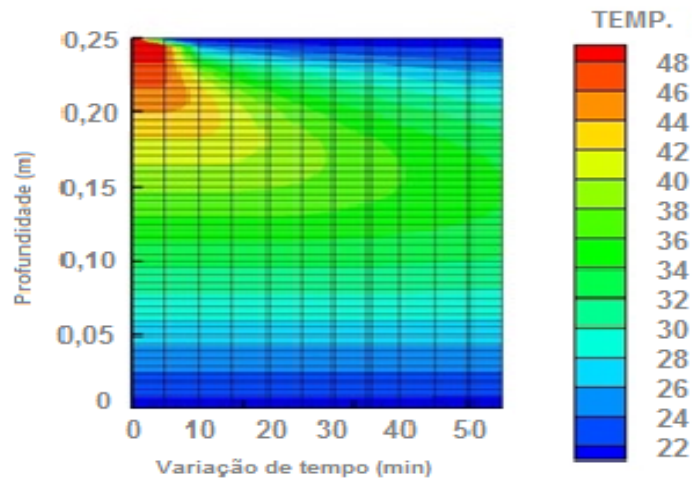


Figura 2: Distribuição de Temperatura na Superfície Multicomposta.

Na Figura 2 estão representados os valores das temperaturas nas diferentes profundidades do sólido. Os resultados obtidos analiticamente para a distribuição de temperatura na parede mostraram-se bastante satisfatórios, demonstrando o mais próximo possível,

dentre as condições de contorno, a distribuição de temperatura que ocorre em um caso real.

4 Conclusões

Esta formulação de distribuição unidimensional de temperatura foi demonstrada como válida para descrever o gradiente de temperaturas em uma parede multicomposta, representando assim, um resultado mais realista.

Os resultados obtidos mostraram que, embora a temperatura do ar tenha decaído ao longo do dia, esses efeitos não são sentidos pela superfície da parede no mesmo instante em que acontece a mudança. Devido ao fato de o calor ser transferido gradualmente em virtude da nova situação de contorno de temperatura proporcionada pela variação, o decaimento de temperatura nas camadas e, conseqüentemente na sua estrutura como um todo, também foi gradual, em taxa logarítmica, mais rápida nos instantes logo após a mudança e mais lenta no final, assumindo tendências assintóticas em seu formato.

Esta equação obtida na análise térmica fornece o comportamento das temperaturas em qualquer ponto desejado da parede e conseqüentemente da sua estrutura. Através destas temperaturas é possível analisar o comportamento mecânico da estrutura.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio financeiro recebido pela CAPES e CNPq.

Referências

- [1] P. Beyer and M. T. Vilhena. Condução de calor não-estacionária em paredes externas multi-compostas. Tese de doutorado, PROMEC - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1998.
- [2] I. B. Aseka. Solução da equação de condução de calor bidimensional, em meios multi-compostos, pelos métodos nodal, com parâmetros concentrados, e a técnica da transformada de laplace. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.
- [3] J. L. Özisik, S. I. R. Costa, V. L. Ribeiro, and H. G. Wetzler. *Álgebra Linear e Aplicações*. Harper-Row, São Paulo, 1987.
- [4] J. C. B. Uchôa. Procedimento numérico e experimental para a avaliação da resistência à folga de sistemas de revestimento. Dissertação, Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2007.
- [5] A. G. Saraiva. Contribuição ao estudo de tensões de natureza térmica em sistemas de revestimento cerâmico de fachada. Dissertação, Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília - DF, 1998.