Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Sobre Coloração Total dos Grafos Bipartidos Completos

Raphael Martins[1]
Ciência da Computação, IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ
Diana Sasaki[2]
Departamento de Matemática Aplicada, IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

## 1 Introdução

Coloração de grafos é um problema desafiador que modela diversas situações reais onde as adjacências representam conflitos. Um grafo $G = (V, A)$ consiste em um conjunto de vértices $V$ conectados por um conjunto de arestas $A$. Uma *$k$-coloração total* de $G$ é uma atribuição de $k$ cores aos elementos (vértices e arestas) de $G$ de forma que elementos adjacentes possuam cores diferentes. O *número cromático total* $\chi_T$ de $G$ é o menor $k$ tal que o grafo possui uma $k$-coloração total. A conhecida Conjectura da Coloração Total afirma que $\Delta+1 \leq \chi_T \leq \Delta+2$, onde $\Delta$ é o grau máximo do grafo. Grafos com $\chi_T = \Delta+1$ são chamados de *Tipo 1*, caso contrário, são chamados de *Tipo 2*. Uma coloração total é *equilibrada* quando a diferença entre as quantidades de vezes em que a cor que mais aparece e a cor que menos aparece é de no máximo um. Dizemos que a cor $i$ está *representada* em um vértice $v$, se o vértice $v$ ou suas arestas incidentes possuem a cor $i$. Um grafo $G$ é *bipartido* se $V$ pode ser particionado em conjuntos $Y$ e $U$ tal que toda aresta de $G$ possui um extremo em $Y$ e outro extremo em $U$. Um grafo é *bipartido completo* quando todo vértice de $Y$ é adjacente a todos os vértices de $U$. Denotamos um grafo bipartido completo por $K_{n,m}$, onde $|Y| = n$ e $|U| = m$; $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$ e $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$.

Neste trabalho, verificamos que todo grafo $K_{n,n}$ é Tipo 2, o que já sabíamos em [1]; e apresentamos uma outra prova de que todo grafo $K_{n,m}$, com $n \neq m$, possui uma $(\Delta+1)$-coloração total equilibrada, resultado originalmente citado em [2].

## 2 Resultados

**Teorema 2.1.** *Todo grafo $K_{n,n}$ é Tipo 2.*

*Demonstração.* Verificamos facilmente que o grafo $K_{1,1}$ é Tipo 2. Considere $n \geq 2$. Inicialmente provamos que não existe $(\Delta+1)$-coloração total do grafo $K_{n,n}$ utilizando uma mesma cor para dois ou mais vértices de mesma parte. De fato, suponha que exista uma

[1]raphaelbgmartins@hotmail.com
[2]diana.sasaki@ime.uerj.br

 

$(\Delta + 1)$-coloração total do grafo $K_{n,n}$ tal que os vértices $y_1$ e $y_2$ possuam mesma cor 1, sem perda de generalidade. Como o grafo é $\Delta$-regular, todo vértice precisa ter a cor 1 representada. No vértice $u_1$ a única forma de se representar a cor 1, é atribuindo esta cor à aresta $u_1y_3$ ou $u_1y_4$ ou $\ldots$ ou $u_1y_n$. Em qualquer escolha, a cor 1 estará representada em mais um vértice de $Y$. Após, a cor 1 estará representada em três vértices de $Y$ e em um vértice de $U$. Se continuarmos representando cor 1 nos vértices de $U$, assim que faltarem dois vértices de $U$ para terem a cor 1 representada, todos os vértices de $Y$ estarão com a cor 1 representada. Assim, o único modo de representar a cor 1 nestes dois vértices é atribuindo a cor aos próprios vértices, o que não é possível pois são adjacentes à $y_1$ e $y_2$.

Agora, note que não existe $(\Delta + 1)$-coloração total do $K_{n,n}$ utilizando $n$ cores nos $n$ vértices de uma mesma parte. De fato, suponha que os $n$ vértices de $Y$ possuam cores diferentes de 1 até $n$ (ou seja, $\Delta$ cores). Isto implica que os vértices de $U$ precisam possuir a cor $n + 1$, pois são adjacentes a todos os vértices de $Y$, o que não é possível.

Pelo Teorema de König, existe uma $\Delta$-coloração das arestas do $K_{n,n}$. Assim, colorindo os vértices de $Y$ com cor $\Delta + 1$ e de $U$ com cor $\Delta + 2$, temos que todo $K_{n,n}$ é Tipo 2. □

**Teorema 2.2.** *Todo $K_{n,m}$ ($n > m \geq 1$) possui uma $(\Delta + 1)$-coloração total equilibrada.*

*Demonstração.* Atribuímos a cor 1 a todos os $m$ vértices de $U$. Assim, esta cor não poderá ser mais utilizada nos outros elementos. Atribuímos as cores $2, 3, \ldots, \Delta + 1$ às arestas $u_1y_1, u_1y_2, \ldots, u_1y_n$, resp. e ao vértice $y_1$ a cor $\Delta + 1$. Em seguida, as arestas $u_2y_1$, $u_2y_2, \ldots, u_2y_n$, recebem as cores $3, 4, \ldots, \Delta + 1$ e 2, resp. e o vértice $y_2$ recebe a cor 2. Continuamos a coloração de forma análoga. Por fim, nas arestas incidentes ao vértice $u_m$ a ordem de cores será: $m+1, m+2, \ldots, \Delta+1, 2, 3, \ldots, m$ e o vértice $y_m$ recebe a cor $m$. Os únicos elementos que ainda não possuem cor são: $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$, que receberão as cores $m+1, m+2, \ldots, \Delta$, resp. Assim, todo $K_{n,m}$ possui uma $(\Delta+1)$-coloração total.

Vamos provar que esta coloração é equilibrada. Atribuímos a cor 1 para todos os $m$ vértices de $U$. Todas as outras cores $2, 3, \ldots, \Delta + 1$ foram representadas uma única vez em cada vértice de $U$, aparecendo também $m$ vezes cada uma. Por fim, cada vértice de $Y$ recebe cores diferentes entre si dentre $2, 3, \ldots, \Delta + 1$. Assim, todas essas cores aparecem um total de $m + 1$ vezes e a cor 1 aparece $m$ vezes. Dessa forma, concluímos que todo grafo $K_{n,m}$ possui uma $(\Delta + 1)$-coloração total equilibrada. □

## 3 Conclusões

Neste trabalho, investigamos a coloração total dos grafos bipartidos completos. Como trabalhos futuros, estudaremos a coloração total na classe dos grafos $r$-partidos completos.

## Referências


[1] M. Behzad, G. Chartrand, and J. K. Cooper, Jr. The colour numbers of complete graphs, *Journal London Mathematics Society*, 42:226–228, 1967.

[2] H-L, Fu. Some results on equalized total coloring, *Congressus Numerantium*, 102:111–119, 1994.