Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicação de TU-subgrafos em Teoria Espectral de Grafos

Freddy William Okino Guedes[1]
Bruno Dias Amaro[2]
Instituto de Matemática, UFMS, Campo Grande, MS

1 Introdução

Seja G um grafo simples com n vértices. Denotamos por $A(G)$ a matriz de adjacência de G e $D(G)$ a matriz diagonal dos graus dos vértices de G. Os TU-subrafos de um grafo G podem ser utlizados para determinar o polinômio caracterísitico da matriz laplaciana sem sinal $Q = D(G) + A(G)$ de um grafo G sem recorrer ao cálculo de determinantes.

2 TU-subgrafos: Definições e resultados em TEG

Definição 2.1 ([1], [2]). *(TU-Subrafo) Seja G um grafo conexo com n vértices e m arestas, onde $m \geq n$ e $Q_G(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$ o Q-polinômio de G. Os subgrafos de G cujas componentes são **árvores** ou **grafos unicíclicos impares** (isto é, um grafo com um único cíclo e de comprimento ímpar) são chamados de TU**-subgrafos**.*

Definição 2.2 ([1], [2]). *(Peso de um TU-Subrafo) Suponha que H seja um TU-subgrafo de G que contém c uniciclos e s árvores $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_s$. Então, o **peso** $W(H)$ de H é definido como $W(H) = 4^c \prod_{i=1}^{s}(1 + |E(\mathcal{T}_i)|)$, onde $|E(\mathcal{T}_i)|$ é o número de arestas de $\mathcal{T}_i$.*

Teorema 2.1 ([1], [2]). *Se $Q_G(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$ é o Q-polinômio de um grafo G, então $p_0 = 1$ e $p_j = \sum_{H_j}(-1)^j W(H_j)$, onde a somatória é realizada sobre todos os TU-subgrafos H_j de G com j arestas.*

3 Exemplo

Neste exemplo mostramos uma aplicação direta do Teorema 2.1. Assim, seja $\mathcal{G}$ o grafo exibido na Figura 1. O Q-polinômio desse grafo é $Q_{\mathcal{G}}(x) = x^5 - 12x^4 + 50x^3 - 90x^2 + 68x - 16$. Assim, sejam $H_{i,j}$ todos os j subgrafos do grafo $\mathcal{G}$ com exatamente i arestas.

•$H_{1,j}$: Nesse caso temos 6 subgrafos $H_{1,j}$ de $\mathcal{G}$, onde cada $H_{1,j}$ é composto por uma árvore com uma aresta. Assim, conforme Definição 2.2, $W(H_{1,j}) = 4^0(1+1) = 2$ para $j = 1, 2, \ldots, 6$ e, portanto, $p_1 = \sum_{j=1}^{6}(-1)^1 W(H_{1,j}) = -(2+2+2+2+2+2) = -12$.

[1]freddyokino@hotmail.com
[2]bruno.amaro@ufms.br

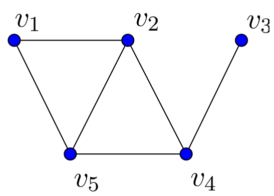

Figura 1: Grafo $\mathcal{G}$ utilizado como exemplo de aplicação do Teorema 2.1.

•$H_{2,j}$: Nesse caso temos 15 subgrafos $H_{2,j}$ de $\mathcal{G}$, donde 10 deles ($j = 1, 2, \ldots, 10$) são compostos por uma árvore com duas arestas e os 5 demais ($j = 11, 12, \ldots, 15$) são compostos por duas árvores com uma aresta cada. Assim, $W(H_{2,j}) = 4^0(1+2) = 3$ para $j = 1, 2, \ldots, 10$ e $W(H_{2,j}) = 4^0(1+1)(1+1) = 4$ para $j = 11, 12, \ldots, 15$ e, portanto, $p_2 = \sum_{j=1}^{15}(-1)^2 W(H_{2,j}) = 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 50$.

•$H_{3,j}$: Nesse caso temos 20 subgrafos $H_{3,j}$ de $\mathcal{G}$, donde 2 deles ($j = 1, 2$) são compostos por um ciclo ímpar, 13 deles ($j = 3, 4, \ldots, 15$) são compostos por uma árvore com três arestas e os 5 demais ($j = 16, 17, \ldots, 20$) são compostos por 2 árvores na qual uma árvore tem uma aresta e a outra tem duas. Logo, $W(H_{3,j}) = 4^1(1+0) = 4$, para $j = 1, 2$, $W(H_{3,j}) = 4^0(1+3) = 4$ para $j = 3, 4, \ldots, 15$ e $W(H_{3,j}) = 4^0(1+1)(1+2) = 6$ para $j = 16, 17, \ldots, 20$ e, portanto, $p_3 = \sum_{j=1}^{20}(-1)^3 W(H_{3,j}) = -(2 \cdot 4 + 13 \cdot 4 + 5 \cdot 6) = -90$.

•$H_{4,j}$: Nesse caso temos 15 subgrafos $H_{4,j}$ de $\mathcal{G}$, donde 1 subgrafo ($j = 1$) é composto por um ciclo ímpar e uma árvore com uma aresta, 5 deles ($j = 2, 3, \ldots, 6$) são compostos por um ciclo ímpar, 8 deles ($j = 7, 8, \ldots, 14$) são compostos por árvores que tem quatro arestas e o último subgrafo ($j = 15$) é composto por um ciclo par, donde **não é um** TU**-subgrafo** e não sendo usado, portanto, na contagem dos pesos. Logo, $W(H_{4,1}) = 4^1(1+1) = 8$, $W(H_{4,j}) = 4^1(1+0) = 4$, para $j = 2, 3, \ldots, 6$ e $W(H_{4,j}) = 4^0(1+4) = 5$, para $j = 7, 8, \ldots, 14$ e, portanto, $p_4 = \sum_{j=1}^{14}(-1)^4 W(H_{4,j}) = (8 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 5) = 68$.

•$H_{5,j}$: Nesse caso temos 6 subgrafos $H_{5,j}$ de $\mathcal{G}$, donde 4 deles ($j = 1, 2, \ldots, 4$) são compostos por um ciclo ímpar cada e os 2 demais ($j = 5, 6$) são compostos por um ciclo par cada, donde **não é um** TU**-subgrafo**. Logo, $W(H_{5,j}) = 4^1(1+0) = 4$, para $j = 1, 2, \ldots, 4$ e, portanto, $p_5 = \sum_{j=1}^{4}(-1)^5 W(H_{5,j}) = -(4 \cdot 4) = -16$.

4 Conclusões

Os TU-subgrafos nos dá uma alternativa de determinar o polinômio caracterísitico de uma matriz laplaciana sem sinal Q associada a um grafo G sem recorrer ao cálculo do determinante. Esse é um exemplo que mostra a conexão entre a Teoria Espectral de Grafos e as propriedades estruturais de um grafo.

Referências

[1] B. D. Amaro, A soma dos maiores autovalores da matriz laplaciana sem sinal em famílias de grafos, Tese de Doutorado, IMECC/UNICAMP, 2014.

[2] D. Cvetković. *Spectral theory of Graphs Based on the Signless Laplacian - A quick Outline*: Research Report, Mathematical Institute SANU, 2010.

