Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Sobre ciclos hamiltonianos em grafos cúbicos

Lucas C. Farah[1]
Engenharia de produção, UERJ, Rio de Janeiro, RJ
Diana Sasaki[2]
Departamento de Matemática Aplicada, IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

1 Introdução

Um grafo $G = (V, A)$ consiste em um conjunto de vértices V conectados por um conjunto de arestas A. Um grafo é dito *cúbico* se todos os vértices possuem três arestas incidentes. Um *ciclo* em um grafo é um caminho de vértices conectados por arestas que começa e termina no mesmo vértice e este é dito *hamiltoniano* se contém todos os vértices do grafo. *Grafos hamiltonianos* são aqueles que possuem ciclos hamiltonianos. O problema do ciclo hamiltoniano consiste em determinar se um grafo G é ou não hamiltoniano.

Em 1884, Peter G. Tait propôs a seguinte conjectura: *Todo grafo 3-conexo planar cúbico possui um ciclo hamiltoniano.* Esta conjectura se manteve até 1946, quando William T. Tutte encontrou um contra-exemplo com 46 vértices [2], este consiste em três fragmentos iguais unidos por um vértice central, como apresentado na Figura 1.

Neste trabalho, investigamos dois conhecidos contra-exemplos para a conjectura de Tait e apresentamos uma construção de grafos cúbicos que utiliza o *fragmento de Tutte*. Além disso, verificamos que todo grafo Prisma é hamiltoniano, o que já sabíamos em [1].

2 Investigando o fragmento de Tutte e os grafos cúbicos

Dado um grafo cúbico G e o fragmento de Tutte F, o grafo G_F é construído pela substituição de cada vértice de G por F. Note que a partir de um grafo G, obtemos vários grafos G_F e estes permanecem cúbicos. A seguir, apresentamos uma propriedade que F possui: se F é parte de um grafo maior, então qualquer ciclo hamiltoniano do grafo precisa entrar/sair do vértice de cima u_7 e sair/entrar por um dos vértices laterais (u_3 e u_1).

Propriedade 2.1. *Se o grafo G_F é hamiltoniano, então o grafo G também é hamiltoniano.*

Demonstração. A partir das propriedades de F observamos que, se G_F possui um ciclo hamiltoniano, então o ciclo entrou e saiu de todos os fragmentos de Tutte. Em G, o ciclo obrigatoriamente deverá entrar e sair de todos os vértices. □

[1]lucasfarah1@gmail.com
[2]diana.sasaki@ime.uerj.br

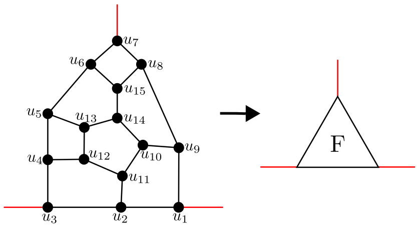

Figura 1: Fragmento de Tutte (esquerda) e contra-exemplo de 46 vértices (direita).

Note que existe grafo G que é hamiltoniano, mas G_F não é. Por exemplo, G construído a partir do contra-exemplo de Tutte pela substituição de cada F por um vértice.

Os *Prismas* P_n, $n \geq 3$, são formados por polígonos regulares externos e internos ligados por arestas (Figura 2). Em 1988, o menor contra-exemplo foi encontrado, este foi obtido pela substituição de dois vértices do P_5 por dois F's. Assim, investigamos os Prismas.

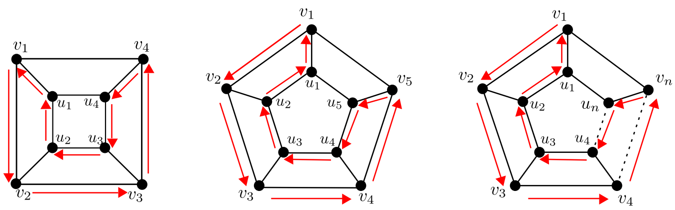

Figura 2: Grafos P_4, P_5 e P_n (caso geral) com ciclos hamiltonianos.

Teorema 2.1. *Todo grafo Prisma P_n é hamiltoniano.*

Demonstração. Nos referimos aos ciclos hamiltonianos nos Prismas da Figura 2. Sem perda de generalidade, escolhemos o vértice v_1 para começar o percurso e seguimos na ordem $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n, u_n, \ldots, u_4, u_3, u_2, u_1$, passando por todos os vértices do grafo e retornando para o vértice inicial. Assim, temos que os Prismas são hamiltonianos. □

3 Conclusões

Investigamos o problema do ciclo hamiltoniano, a partir de dois grafos não hamiltonianos. Como trabalhos futuros, estudaremos o problema na classe dos grafos bipartidos.

Referências

[1] R. C. Read and R. J. Wilson, An Atlas of Graphs, Oxford, England: Oxford University Press, reprint, Chapter 6 special graphs, 261–270, 2004.

[2] W. T. Tutte, On Hamiltonian circuits, *Journal of the London Mathematical Society*, 21:98–101, 1946.

