Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Coloração de arestas em grafos split-comparabilidade

Thamirys Moreira dos Santos Rauch[1]
Sheila Morais de Almeida[2]
Departamento Acadêmico de Informática, UTFPR, Ponta Grossa, PR

1 Introdução

Uma k-coloração de arestas de um grafo G é uma atribuição de k cores às arestas de G de forma que arestas adjacentes não possuam a mesma cor. O índice cromático de G, denotado por $\chi'(G)$, é o menor k para o qual G admite uma k-coloração de arestas. Vizing [5] provou que, para um grafo simples G, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, dando origem ao Problema da Classificação, segundo o qual G é Classe 1 se $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou Classe 2, se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Mesmo com a restrição imposta por Vizing, decidir se um grafo é Classe 1 é um problema NP-Completo [1].

Um grafo $G = [Q, S]$ é grafo split se e somente se o conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique Q e um conjunto independente S. Segundo [3], o grafo $G = [Q, S]$ é split-comparabilidade se, e somente se, os vértices da clique Q podem ser ordenados $v_1v_2v_3 \dots v_{|Q|}$ e particionados em três subconjuntos (possivelmente vazios) $Q_L = \{v_1 \dots v_p\}$, $Q_R = \{v_q \dots v_{|Q|}\}$ e $Q_t = Q \setminus (Q_L \cup Q_R)$ e o conjunto independente S pode ser particionado em S_L, S_T e S_R, tal que a vizinhança de qualquer vértice $u \in S$ está em um dos seguintes intervalos: $[v_1, v_i]$, para $i \leq p$; $[v_j, v_{|Q|}]$, para $q \leq j \leq |Q|$; ou $[v_1, v_i] \cup [v_j, v_{|Q|}]$, para $i \leq p$ e $q \leq j \leq |Q|$. O Problema da Classificação está aberto para a classe dos grafos split-comparabilidade.

Esse trabalho apresenta uma técnica para coloração de arestas que permite determinar o índice cromático de alguns grafos split-comparabilidade.

2 Resultado

Para apresentação do resultado, é necessário conhecer alguns conceitos e resultados anteriores apresentados brevemente a seguir.

Um grafo G de ordem ímpar com vértice universal é sobrecarregado se $|E(\overline{G})| < \Delta(G)/2$, onde $E(\overline{G})$ é o conjunto de arestas do complemento de G. Se G contém um subgrafo H com $\Delta(H) = \Delta(G)$ e H é sobrecarregado, então G é subgrafo-sobrecarregado.

[1]rauch@alunos.utfpr.edu.br
[2]sheilaalmeida@utfpr.edu.br

Grafos sobrecarregados ou subgrafo-sobrecarregados são Classe 2. Plantholt [4] mostrou que todo grafo G com vértice universal é Classe 1 se, e somente se, não é sobrecarregado. Machado e Figueiredo [2] provaram que o índice cromático de um grafo é igual ao índice cromático de seu seminúcleo, onde o seminúcleo é o subgrafo induzido pelos vértices de grau máximo e seus vizinhos. De agora em diante, G é um grafo split-comparabilidade cujos vértices estão ordenados e particionados em uma clique $Q = [Q_L, Q_T, Q_R]$ e um conjunto independente $S = [S_L, S_T, S_R]$, como definidos na Introdução.

Teorema 1. *Seja H o subgrafo de G induzido por $S_L \cup S_T \cup Q$. Se $|E(\overline{H})| - |E(G) \setminus E(H)| \geq \Delta(G)/2$, então G é Classe 1 se, e somente se, G não é subgrafo-sobrecarregado.*

Prova. Se $|S_L| > |S_R|$, H tem vértice universal e, por [2] e [4], G é Classe 1 se, e somente se, não é subgrafo-sobrecarregado. Se $|S_R| > |S_L|$ pode-se resolver de forma análoga. Se $|S_L| = |S_R|$, rotule os vértices de S_L: $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{|S_L|}$, e os vértices de S_R: $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{|S_R|}$. Seja G' o grafo com conjunto de vértices $V(G') = V(H)$ e conjunto de arestas $E(G') = E(H) \cup F$, onde uma aresta $s_i v \in F$ se, e somente se, $r_i v \in E(G)$, $1 \leq i \leq |S_R|$. Por abuso de notação, adotamos os mesmos rótulos para os vértices de ambos os conjuntos, $V(G)$ e $V(G')$.

Por construção, $\Delta(G) = \Delta(G')$. Além disso, pela definição de split-comparabilidade, como $p < q$, G' é um grafo simples. Os vértices não-adjacentes a $v_1 \in Q_L$ no grafo G são exatamente os vértices do conjunto S_R, que por construção não pertencem a G'. Então, v_1 é vértice universal em G'. Observe que $|E(\overline{G'})| \geq \Delta(G)/2$, pois $|E(G')| = |E(\overline{H})| - |E(G) \setminus E(H)| \geq \Delta(G)/2$. Logo, G' não é sobrecarregado e é Classe 1, por Plantholt [4]. Seja $\alpha : E(G') \to \{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$ uma coloração das arestas de G'. Para colorir cada aresta uv do grafo G, se uv existe em G', pinte $uv \in G$ com cor $\alpha(uv)$, caso contrário, $uv = r_i v \in E(G)$, $r_i \in S_R$ e $v \in Q_R$. Pinte $r_i v$ com a cor $\alpha(s_i v)$, $1 \leq i \leq |S_R|$. Como G foi colorido com $\Delta(G)$ cores, G é Classe 1.■

Referências

[1] I.Holyer. *The NP-completeness of edge-coloring.* SIAM Journal on Computing, v. 10, p. 718–720, 1981.

[2] R. C. S. Machado and C. M. H. Figueiredo. *Decompositions for edge-coloring join graphs and cobipartite graphs.* Discrete Applied Mathematics, v. 158(12), p. 1336–1342, 2010.

[3] C. Ortiz and M. Villanueva. *Threshold Dimension of Split-Permutation Graphs.* Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, v. 75, p. 117–127, 2010.

[4] M. J. Plantholt. *The chromatic index of graphs with a spanning star.* Journal of Graph Theory, v. 5, p. 45–53, 1981.

[5] V. G. Vizing. *On an estimate of the chromatic class of a p-graph.* Diskret. Analiz. 1, v. 3, p. 25–30, 1964.