Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Grafos de Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas na $2-$Esfera

Alana Cavalcante Felippe[1]
Depto de Ciências Exatas e Aplicadas, UFOP, João Monlevade, MG
Catarina M. J. Sánchez[2]
Depto de Matemática, UFV, Viçosa, MG

1 Introdução

Em [1], foram introduzidos grafos com pesos nos vértices associados às aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas no plano, como um invariante topológico das aplicações. Estes grafos também são uma ferramenta útil na construção de exemplos destas aplicações, com um conjunto singular pré-determinado. Entre outras aplicações, esta técnica foi estendida para aplicações entre superfícies fechadas e orientadas ([2, 3]).

O objetivo deste trabalho é apresentar resultados que estendem os resultados, obtidos em [2], para grafos associados a aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera, para aplicações estáveis de superfícies fechadas e não orientadas na esfera.

2 Grafos associados a aplicações estáveis entre superfícies

Uma aplicação $f : M \longrightarrow S^2$ é dita *estável*, se qualquer aplicação suficientemente próxima de f, no conjunto das aplicações suaves $C^\infty(M, N)$ (na C^∞-topologia de Whitney) é equivalente a f.

Um ponto $x \in M$ é dito ponto *regular* de f se a aplicação f é um difeomorfismo local na vizinhança do ponto x, caso contrário dizemos que x é um ponto *singular*. O conjunto das singularidades de f, denotado por Σf, são do tipo dobra ou cúspides (segundo Whitney [5]) e formam curvas fechadas que decompõe M em regiões regulares.

Em [1] foi introduzido o *grafo dual* associado ao par $(M, \Sigma f)$, onde cada vértice do grafo corresponde a uma *região regular* e cada aresta corresponde a uma *curva singular*. Um vértice v recebe um *peso* w se a região regular correspondente a v tem *gênero* w. Uma aresta a conecta o vértice v se, e somente se, a curva singular correspondente a a está no bordo da região regular correspondente a v. Uma aresta de um *laço* recebe uma $\star$ se a curva correspondente tem como vizinhança uma *faixa de Möbius*. Denotamos um grafo por $\mathcal{G}_W^S(V, E)$, para indicar que o grafo tem V vértices, E arestas, S laços com $\star$ e peso

[1]alana@decea.ufop.br
[2]cmendes@ufv.br

total nos vértices igual a W. Se $S = 0$, o grafo será denotado por $\mathcal{G}_W(V, E)$. Um grafo é dito grafo *bipartido* se é possível atribuir sinais $\pm$ a cada um de seus vértices de forma que cada aresta conecte vértices de sinais opostos. Caso contrário, dizemos que o grafo é *não-bipartido.* Naturalmente, todo grafo bipartido não tem $\star$.

Um grafo com pesos nos vértices pode ser associado a uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada na $2-$esfera se é bipartido, pois cada curva separa duas regiões que são levadas com orientações opostas sobre S^2.

Em [2] foi provado que: *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}_W(V, E)$ é realizado por uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada M na $2-$esfera, onde o gênero de M é dado por $1 - V + E + W$.* Generalizando, temos: *Todo grafo $\mathcal{G}_W^S(V, E)$ é realizado por uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada M na $2-$esfera, onde o gênero de M é dado por $1-V+E+W$ se M é orientada e por $2(1-V+E+W)-S$ se M é não orientada.*

Para aplicações dobras (aplicações sem cúspides) foi provado em [2] que: *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}_W(V, E)$ é realizado por alguma aplicação dobra de uma superfície fechada e orientada M na $2-$esfera com grau $d = (V^+ - V^-) - (W^+ - W^-)$.* Generalizando, temos: *Todo grafo $\mathcal{G}_W(V, E)$ é realizado por alguma aplicação dobra de uma superfície fechada M na esfera, onde o gênero de M é dado por $1 - V + E + W$ se M é orientada e por $2(1 - V + E + W)$ se M é não orientada.*

3 Conclusões

Este trabalho fecha o estudo, do ponto de vista global, de quais grafos podem ser associados às aplicações de superfícies fechadas na esfera.

Referências

[1] D. Hacon , C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint. *Real and Complex Singularities*. Informa UK Limited, 2003. DOI:10.1201/9780203912089.ch10.

[2] D. Hacon , C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere. *J. Sing.* 2, 67-80, 2010. DOI:10.5427/jsing.2010.2e.

[3] C. Mendes de Jesus, Graphs of stable maps between closed orientable surfaces, *Comp. Appl. Math.*, 2016. DOI :10.1007/s40314-016-0317-9.

[4] T. Ohmoto and F. Aicardi, First Order Local Invariants of Apparent Coutours, *Topology*, 45, 27–45, 2006.

[5] H. Whitney, On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane, *Ann. of Math.* 62 ,374-410, 1995.