Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Caracterização de Ordens Maximais dos Quatérnios visando a construção de reticulados

Nelson Gomes Brasil Junior[1]
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP
Cintya Wink de Oliveira Benedito[2]
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP
Sueli I. R. Costa[3]
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, SP

1 Álgebra dos Quatérnios e Ordens Maximais

Nosso trabalho consiste na construção de reticulados algébricos a partir de uma determinada álgebra de quatérnios gerada de um corpo de números totalmente real [2]. Reticulados algébricos vem sendo utilizados na proposição de códigos para transmissão de sinais em canais com desvanecimento do tipo Rayleigh.

Dado $\mathbb{K}$ um corpo de números, uma *álgebra dos quatérnios* $\mathcal{A} = (a,b)_{\mathbb{K}}$ sobre $\mathbb{K}$ é uma álgebra central simples de dimensão 4 com base $\{1,\, i,\, j,\, k\}$ satisfazendo $i^2 = a$, $j^2 = b$ e $k = ij = -ji$, onde $a, b \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$.

Seja R um anel com corpo de frações $\mathbb{K}$. Uma R-ordem $\mathcal{O}$ em $\mathcal{A}$ é um subanel com unidade de $\mathcal{A}$ que é um R-módulo finitamente gerado tal que $\mathcal{A} = \mathbb{K}\mathcal{O}$. Já uma ordem maximal $\mathcal{M}$ tem a propriedade de não estar propriamente contida em nenhuma outra ordem [2, 3].

É possível construir reticulados a partir de uma Ordem Maximal da Álgebra dos Quatérnios. Em particular, apresentamos resultados para corpos de números da forma

$$\mathbb{K}_n = \mathbb{Q}\,(\,\eta_n\,)\,, \quad \text{onde} \quad \eta_n = \zeta_{2^n} + \zeta_{2^n}^{-1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right), \quad n \geq 3 \tag{1}$$

e ζ_k uma raiz k-ésima da unidade. Podemos reescrever η_n em (1) como $\eta_n = \sqrt{2+\eta_{n-1}}$, $\eta_3 = \sqrt{2}$.

No teorema a seguir utilizamos as raízes do polinômio de Chebyshev de um determinado grau para descrever os polinômios minimais dos corpos $\mathbb{K}_n$.

[0]Este trabalho foi parcialmente financiado por FAPESP 2013/25997-7, CNPq 312926/2013-8 e CAPES.

[1]nelson.gbrasil@gmail.com
[2]cintyawink@gmail.com
[3]sueli@ime.unicamp.br

Teorema 1.1. Seja η_n como em (1), então o polinômio minimal para este elemento em $\mathbb{K}_n$, representado por $p_n(x)$ é dado por

$$p_n(x) = 2\,T_{2^{n-2}}\left(\frac{x}{2}\right), \tag{2}$$

onde $T_k(x)$ é o k-ésimo polinômio de Chebyshev do primeiro tipo [1].

Exemplo 1.2. Seja $\eta_4 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Portanto, o polinômio minimal de η_4 é dado por

$$p_4(x) = 2\,T_{2^{4-2}}\left(\frac{x}{2}\right) = 2\,T_4\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(8\left(\frac{x}{2}\right)^4 - 8\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right) = x^4 - 4x^2 + 2.$$

Utilizando o polinômio minimal encontrado no Teorema 1.1, obtemos no resultado a seguir uma caracterização para a base da ordem maximal dos quatérnios, que é utilizada na construção de reticulados. Na demonstração, utilizamos as Proposições 2.2.1, 2.2.4 e 2.2.5 de [2].

Teorema 1.3. Seja $\mathbb{K}_n$ construído como em (1) e seja $\mathcal{A}_n = (-1,\,-1)_{\mathbb{K}_n}$ a álgebra dos quatérnios associada. Então, a ordem maximal $\mathcal{O}_n$ da álgebra tem como base

$$\mathcal{O}_n = \left\{1,\, \frac{p_{n-1}(\eta_n)}{2}(1+i),\, \frac{p_{n-1}(\eta_n)}{2}(1+j),\, \frac{1+i+j+k}{2}\right\}, \tag{3}$$

sendo $p_{n-1}(x)$ o polinômio mininal de η_{n-1} como em (2).

2 Conclusões

A partir dos dois resultados acima, podemos construir reticulados em dimensão 2^k, $k \geq 3$ utilizando ordens maximais como em [2,4]. Ao aumentar a dimensão, torna-se computacionalmente inviável o cálculo da ordem maximal de uma álgebra. A caracterização das ordens maximais para a sequência de corpos da forma (1) dada pelo Teorema 1.3 viabiliza este processo.

Registramos nosso agradecimento ao revisor pelas pertinentes sugestões.

Referências

[1] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, 731–748, 1985.

[2] C. W. O. Benedito, Construção de Grupos Fuchsianos Aritméticos provenientes de Álgebras dos Quatérnios e Ordens Maximais dos Quatérnios associados a Reticulados Hiperbólicos, Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica. Unicamp, 2014.

[3] I. Reiner. *Maximal orders.* London: Academic press, 1975.

[4] F.-T. Tu and Y. Yang, Lattice packing from quaternion algebras, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, 229-237, 2012.