Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Ciclos Hamiltonianos em Grafos

Marcelo de Souza Santos[1]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS
Carlos Hoppen[2]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS

1 Introdução

Um grafo $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas é dito *hamiltoniano* se possui um *ciclo hamiltoniano*, isto é, um ciclo que, partindo de um vértice qualquer, percorre todos os vértices, sem repetição, e retorna ao vértice inicial.

Apesar de ser um problema extremamente simples de enunciar, é difícil decidir se um grafo é hamiltoniano. De fato, esse é um problema NP-completo [4] e muita da pesquisa relacionada a esse problema consiste em encontrar condições suficientes ou necessárias para que um grafo seja hamiltoniano. São conhecidas condições suficientes justas que garantem a hamiltonicidade de um grafo em termos do número de arestas, do grau mínimo e da sequência de graus dos vértices, por exemplo [1]. Também nos referimos a [1] para a notação de Teoria dos Grafos que não é definida nesse trabalho.

Ferramentas espectrais revelaram-se úteis no estudo de diversos problemas difíceis, como o particionamento de grafos e o problema do isomorfismo, por exemplo. Dois trabalhos precursores na obtenção de condições suficientes espectrais para hamiltonicidade são os trabalhos de Fiedler e Nikiforov [3], que encontram condições suficientes para a hamiltonicidade de um grafo com base no seu raio espectral (o maior autovalor da matriz de adjacências), e de Butler e Chung [2], que relacionam a hamiltonicidade com os autovalores da matriz laplaciana associada ao grafo. Esses trabalhos deram origem a uma vasta literatura sobre condições espectrais que garantem hamiltonicidade.

2 Condições Espectrais

Associam-se a um grafo G diferentes matrizes e chamamos de *espectro* de G (com respeito à matriz escolhida) o multiconjunto composto pelo autovalores da matriz associada a ele. A Teoria Espectral dos Grafos busca determinar propriedades dos grafos através de seus espectros. Duas das matrizes mais estudadas nessa área são as matrizes de adjacências e laplaciana. A matriz de adjacências $A(G) = (a_{ij})_{n\times n}$ de um grafo simples G é uma matriz indexada pelos vértices de G, onde $a_{ij} = 1$ se v_i é adjacente a v_j, e 0 caso contrário. A

[1]marcelosantos@ufrgs.br
[2]choppen@ufrgs.br

© 2017 SBMAC

matriz laplaciana $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $D(G)$ é a matriz diagonal com os graus dos vértices de G, respeitando essa indexação, e $A(G)$ a matriz de adjacências.

Apresentaremos as condições encontradas nos trabalhos citados acima que se tornaram importantes para o desenvolvimento do estudo da hamiltonicidade sob um ponto de vista espectral. Dada uma matriz simétrica $M_{n\times n}$ associada a um grafo G, denotamos os seus autovalores por $\lambda_1^M \geq \lambda_2^M \geq \ldots \geq \lambda_n^M$. Analisando o raio espectral de G e do seu complemento $\overline{G}$, Fiedler e Nikiforov, encontraram condições suficientes que garantem ciclos hamiltoniano em um grafo. Observaram que se $\lambda_1^A(G) > n-2$, então G contém um ciclo hamiltoniano exceto se $G = K_{n-1} + e$ (um grafo completo de $n-1$ vértices com uma aresta pendurada), e que se $\lambda_1^A(\overline{G}) \leq \sqrt{n-2}$, então G contém um ciclo hamiltoniano exceto se $G = K_{n-1} + e$.

O trabalho de Butler e Chung nos mostra uma condição suficiente para um grafo ser hamiltoniano com base em uma análise da proximidade entre os autovalores não triviais da matriz laplaciana e o grau médio do grafo. O resultado encontrado é que existe uma constante c tal que, se G é um grafo com n vértices (n suficientemente grande) e com grau médio d tal que

$$\mid d - \lambda_i^L(G) \mid \leq c\frac{(\log\log n)^2}{\log n(\log\log\log n)}d \tag{1}$$

para $i \neq n$, então G é hamiltoniano.

Vale destacar resultados espectrais obtidos recentemente para classes específicas de grafos, como grafos bipartidos e para autovalores de outras matrizes, como o raio espectral da matriz laplaciana sem sinal [5]. Atualmente, estamos estudando técnicas utilizadas em demonstrações desse tipo, com o objetivo de obter condições suficientes mais fracas para garantir hamiltonicidade, estudar condições específicas para classes de grafos particulares ou mesmo obter condições espectrais baseadas em matrizes ainda não exploradas.

Referências

[1] J. A. Bondy e U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Volume 244, Springer Verlag, 2008.

[2] S. Butler e F.R.K. Chung. Small spectral gap in the combinatorial Laplacian implies Hamiltonian, *Annals of Combinatorics*, 13:403-412, 2010. DOI:10.1007/s00026-009-0039-4.

[3] M. Fiedler e V. Nikiforov. Spectral radius and Hamiltonicity of graphs, *Linear Algebra and its Applications*, 432(9):2170-2173, 2010. DOI:10.1016/j.laa.2009.01.005.

[4] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems, *Complexity of Computer Computation*, 85-103. 1972.

[5] R. Liu, W.C. Shiu e J. Xue. Sufficient spectral conditions on Hamiltonian and traceable graphs, *Linear Algebra and its Applications*, 467:254–266, 2015. DOI:10.1016/j.laa.2014.11.017.

© 2017 SBMAC