Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Autovalores do Produto Direto do Grafo $P_2 \times G_2$

Bruna Santos de Souza[1]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS

1 Introdução

Em [3], Hammack, Imrich e Klavžar fazem um extenso apanhado sobre produtos entre grafos. Descrevem produtos mais conhecidos como o produto Cartesiano e também outros menos desenvolvidos. Dados grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, onde V_1 e V_2 são os conjuntos de vértices e E_1 e E_2 são os conjuntos de arestas, dizemos que uma operação entre os grafos G_1 e G_2 é um produto se o grafo resultante tem conjunto de vértices $V_1 \times V_2$ (produto cartesiano entre V_1 e V_2). Seu conjunto de arestas irá depender de cada produto.

Associamos ao grafo G diferentes matrizes e o multiconjunto dos autovalores de uma matriz M associada ao grafo determinará o espectro de G em relação à matriz M ($spect_M$). Dado um grafo G, a matriz de adjacências de G, denotada por $A(G)$ será a matriz simétrica onde $a_{ij} = 1$ se o vértice i for adjacente ao vértice j e 0 caso contrário; a matriz dos graus de G, denotada por $D(G)$ será a matriz diagonal, onde os elementos d_{ii} será grau do vértice i. As matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal serão dadas por $L(G) = D(G) - A(G)$ e $Q(G) = D(G) + A(G)$, respectivamente.

Neste trabalho apresentaremos resultados acerca dos autovalores das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal para um caso particular de produto direto entre o caminho P_2 e um grafo G_2 qualquer, sendo o caminho P_2 o grafo de dois vértices com uma aresta ligando-os.

2 Autovalores do Produto Direto

Primeiramente vamos definir produto direto entre dois grafos:

Definição: Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que $(u_1, ..., u_n)$ são os vértices de G_1 e $(v_1, ..., v_m)$ são os vértices de G_2 . O produto direto entre G_1 e G_2, denotado por $G_1 \times G_2$, tem conjunto de vértices $V_1 \times V_2$ e seus vértices são do tipo (u_i, v_j) Dois vértices de (u_i, v_j) e (u_k, v_ℓ) serão adjacentes se u_i é adjacente a u_k em G_1 e v_j é adjacente a v_ℓ em G_2.

O que apresentamos neste trabalho, será a demonstração do seguinte Teorema:

Teorema 1: Sejam os grafos P_2 e $G_2 = (V_2, E_2)$ e sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os L-autovalores de G_2 e $\delta_1, ..., \delta_n$ os Q-autovalores de G_2. Valerá o seguinte resultado:

$$spect_Q(P_2 \times G_2) = spect_L(P_2 \times G_2) = \{spect_Q(G_2)\} \cup \{spect_L(G_2)\}.$$

[1]brunasouza@ufrgs.br

Para a demonstração do Teorema utilizaremos os seguintes resultados preliminares:

Lema 1: [2] Dada uma matriz M, no seguinte formato e denotando por $\sigma(M)$ o conjunto dos autovalores de M, teremos:

$$M = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma(M) = \sigma(B - C) \cup \sigma(B + C).$$

Lema 2: [5] A forma fechada das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal do grafo resultante de $P_2 \times G_2$ são, respectivamente:

$$L(P_2 \times G_2) = D(P_2) \otimes D(G_2) - A(P_2) \otimes A(G_2)$$
$$Q(P_2 \times G_2) = D(P_2) \otimes D(G_2) + A(P_2) \otimes A(G_2)$$

Lema 3: [1] O grafo $P_2 \times G_2$ é bipartido.

Lema 4: [1] Para grafos bipartidos, vale que $spect_L = spect_Q$.

Demonstração do Teorema 1: Os Lemas 3 e 4 nos garantem que os autovalores da matriz laplaciana e laplaciana sem sinal para o grafo $P_2 \times G_2$ são os mesmos. Sendo assim, basta calcularmos um deles. Com a forma fechada dada no Lema 2, teremos que:

$$D(P_2) \otimes D(G_2) + A(P_2) \otimes A(G_2) =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes D(G_2) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes A(G_2) = \begin{bmatrix} D(G_2) & A(G_2) \\ A(G_2) & D(G_2) \end{bmatrix}.$$

Pelo Lema 1, temos que o conjunto dos autovalores da matriz $P_2 \times G_2$ é igual a união dos conjuntos dos autovalores de $D(G_2) + A(G_2) = Q(G_2)$ e $D(G_2) - A(G_2) = L(G_2)$, ou seja, $spect_L(P_2 \times G_2) = spect_Q(P_2 \times G_2) = \{spect_Q(G_2)\} \cup \{spect_L(G_2)\}$.

Referências

[1] N. Abreu, R. R. Del-Vecchio, V. Trevisan e C. T. M. Vinagre. Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução. In *Notas do III^o Colóquio de Matemática da Região Sul*, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, 2014.

[2] E. Fritscher. Decomposição de espectros de grafos e aplicações. Tese de Doutorado, UFRGS, 2014.

[3] R. Hammach. W. Imrich and S. Klavžar, Handbook of product graphs. *Discrete Mathematics and its Applications* (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

[4] P. Lancaster and M. Tismenetsky, The theory of matrices, second edition. *Computer Science and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1985.

[5] B. Souza. Produtos e Coespectralidade de Grafos. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2016.