Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Cálculo em escalas temporais a duas variáveis: o gradiente

Lucas Ragiotto[1]
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, Ilha Solteira, SP
Fabricia Mara Tonon[2]
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, Ilha Solteira, SP
Luciano Barbanti[3]
Depto. de Matemática, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, Ilha Solteira, SP

1 Introdução

O cálculo em escalas temporais foi introduzido em 1988 por Stefan Hilger, com o intuito de unificar a teoria de sistemas, tanto contínuo quanto discreto. Uma escala temporal $\mathbb{T}$ é um conjunto fechado não-vazio dos números reais. Exemplos de escalas temporais são $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \left\{\frac{1}{2^k}; k \in \mathbb{N}\right\}$, ou o Conjunto de Cantor.

Os operadores fundamentais desta teoria unificante são:

$$\sigma(t) = inf\,\{r; r > t\} \text{ - Operador de avanço.}$$
$$\rho(t) = sup\,\{r; r > t\} \text{ - Operador de retardo.}$$

A Δ - derivada;

$$f^{\Delta} = \begin{cases} f'(t), \text{ se } \sigma(t) = t \\ \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}, \text{ se } \sigma(t) \neq t \end{cases}.$$

O conceito de integral está relacionado a primitivas. Uma construção por limites (no sentido de Riemann) pode ser encontrada em [3].

Com estas definições Bohner e Guseinov [1] fizeram o estudo de sistemas dinâmicos com o cálculo em escalas temporais [4]. Na consideração de derivadas parciais com o cálculo em escalas temporais houve necessidade de extensão do cálculo a duas variáveis e o caminho que se tomou invariavelmente foi o de considerar neste caso a escala temporal no $\mathbb{R}^2$ como o conjunto produto de duas escalas nos reais (v. por ex. [2]). Esta hipótese é restritiva, pois nos impede de considerar a natureza "liberal"de uma escala temporal que é ser um conjunto fechado e não nulo (agora no $\mathbb{R}^2$) e isto vai se refletir no desenvolvimento das EDP mormente no aspecto das condições iniciais possíveis.

Então, existe a necessidade de se fazer uma teoria sobre Cálculo em escalas temporais a mais de uma variável considerando uma escala temporal no plano como sendo um

[1]lucasragiotto@gmail.com
[2]fabricia.tonon@hotmail.com
[3]barbanti@mat.feis.unesp.br

subconjunto não-vazio e fechado do $\mathbb{R}^2$. Isto traz as primeiras dificuldades com a definição de gradiente, pois devemos calcular o que no Cálculo clássico são representadas pelas derivadas parciais, e gradiente. Definido o gradiente há a possibilidade de se calcular o correspondente às integrais de linha e de superfície no cálculo clássico, para a demonstração dos teoremas egrégios em superfícies (Green, Gauss e Stokes).

2 Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é estender o conceito de escala temporal no plano considerando-o como um subconjunto não-vazio e fechado do mesmo, e dar o conceito de derivadas direcionais (nas direções possíveis na escala) e o conceito de gradiente neste contexto.

3 Conclusões

Seja $\mathbb{T}_2$ um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, fechado, com ao menos dois elementos. Seja $v \in \mathbb{R}^2$ com $|v| = 1$. Dado $\mathrm{P} \in \mathbb{T}_2$, definimos como $\sigma_v(\mathrm{P}) = \mathrm{P} + \alpha_0 v$, onde $\alpha_0 = inf\,\{\alpha > 0, \mathrm{P} + \alpha v \in \mathbb{T}_2\}$. Definimos a

$$\mathrm{D}_v^{\Delta} f(\mathrm{P}) = \begin{cases} \nabla f(\mathrm{P})v, \text{ se } \alpha_0 = 0 \\ \frac{f(\sigma_v(\mathrm{P})) - f(\mathrm{P})}{\alpha_0}, \text{ se } \alpha_0 \neq 0 \end{cases}.$$

Seja $\mathbb{T}_2$ com ao menos três pontos distintos. Vamos definir gradiente de f no ponto P, neste contexto de escalas temporais, nas duas direções $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$.

$$Grad\ f(v,w)(P) = \left(\frac{v_2.D_w^{\Delta}(P)\ -\ w_2 D_v^{\Delta}(P)}{|v_1 w_2\ -\ v_2 w_1|}, \frac{w_1 D_v^{\Delta}(P)\ -\ v_1 D_w^{\Delta}(P)}{|v_1 w_2\ -\ v_2 w_1|}\right)$$

Teorema 3.1. *Se P é denso em todas as direções v, $|v| = 1$, então para todo v, w, z vale $Grad\ f(v,w)(P) = Grad\ f(v,z)(P) = \nabla f(P)$.*

A ideia da definição de $Grad\ f(v,w)(P)$ vem do caso contínuo, onde $(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P}), 1)$ é vetor perpendicular ao gráfico de f, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, no ponto $(p_1, p_2, f(\mathrm{P}))$, $\mathrm{P} = (p_1, p_2)$.

Esta é a principal conclusão deste trabalho: sem o conceito de gradiente neste âmbito não poderíamos prosseguir nesta linha até os grandes teoremas geométricos.

Referências

[1] M. Bohner and G. Sh. Guseinov, Partial Differentiation on Time Scales, *Dynamic Systems And Applics.* 13:351-379, 2004.

[2] M. Bohner and G. Sh. Guseinov, Line integrals and Green's formula on time scales, *J. Math. Anal. Appl.*, 326:1124-1141, 2007.

[3] G. Sh. Guseinov, Integration on time scales, *J. Math. Anal. Appl.* 285:107-127, 2003.

[4] S. Hilger, Analysis on measure chains: a uni ed approach to continuous and discrete calculus Results, *Math.*, 18:18-56, 1990.