Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Famílias Consistentes e a Coloração Total de Grafos

Abel Rodolfo García Lozano[1]
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - Departamento de Matemática
Universidade do Grande Rio - Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional
Angelo Santos Siqueira [2]
Universidade do Grande Rio - Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional
Sergio Ricardo Pereira de Mattos[3]
Universidade do Grande Rio - Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Universidade Federal do Rio de Janeiro - Programa de Doutorado em Engenharia de Produção
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional

Resumo. Neste trabalho apresentamos o conceito de famílias consistentes e alguns resultados teóricos, com o objetivo principal de desenvolver uma heurística para a coloração total de grafos, procurando respeitar a conjectura de Vizing-Behzad. Para isso, definimos inicialmente alguns termos necessários para a identificação destas famílias. Em seguida, provamos quatro proposições relativas a este novo conceito, e finalizamos o texto fazendo a conexão entre estas famílias e a coloração total.

Palavras-chave. Família consistente, conjectura de Vizing, coloração total.

1 Introdução

Existem diversas heurísticas que tratam o problema da coloração em grafos [2, 4, 5], e neste trabalho, apresentamos alguns resultados teóricos e uma nova heurística para obter a coloração total de um grafo, com no máximo $\Delta + 2$ cores (conjectura de Vizing-Behzad), baseada no conceito de famílias consistentes. Este texto está organizado da seguinte forma: inicialmente apresentamos os conceitos de família finita, subfamília, multiplicidade, igualdade de famílias e família robusta, que serão necessários para a introdução dos conceitos de família consistente, elemento crítico e família associada. Em seguida, enunciamos e provamos quatro proposições que serão úteis para a identificação e construção das famílias consistentes. Finalizamos o trabalho fazendo a conexão entre estas famílias e o processo de coloração total de grafos. Ressaltamos ainda, que das quatro proposições apresentadas, a 3.3 e a 3.4 representam novas contribuições para o desenvolvimento deste estudo.

[1]arglozano@terra.com.br
[2]asiqueira@unigranrio.edu.br
[3]rickdemattos@ufrj.br

 © 2017 SBMAC

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

2 Definições e Notações Básicas

Definição 2.1 (Família finita). *Uma família finita de partes de A, é uma função $f : I_n \to P(A)$, onde I_n denota o conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. $P(A)$ denota o conjunto das partes de A e $f = [f(1), f(2), \ldots, f(n)]$ denota a família f.*

Daqui em diante usaremos simplesmente a palavra família, para denotar uma família finita de partes de A.

Definição 2.2 (Subfamília). *Sejam $f : I_n \to P(A)$ e $g : I_m \to P(A)$ famílias, diz-se que g é subfamília de f, se existe uma função injetiva $h : I_m \to I_n$, tal que $g(i) = f(h(i))$, para todo $i \in I_m$. Neste caso, usamos a notação $g < f$.*

Antes de continuar com as definições vamos introduzir algumas notações necessárias para a clareza do texto.

- $f \vee g$ denota a menor família h, tal que $f < h$ e $g < h$, ou seja, se existe outra família u, tal que $f < u$ e $g < u$, então $h < u$;
- $f \wedge g$ denota a maior família h, tal que $h < f$ e $h < g$, ou seja, se existe outra família u, tal que $u < f$ e $u < g$ então $u < h$;
- $\cup(f)$ denota o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} f(i)$;
- $|X|$ denota a cardinalidade do conjunto X; $[X]^n$ denota a família $[\overbrace{X, X, \cdots, X}^{n \text{ vezes}}]$;
- $|f|$ denota a cardinalidade do domínio da família f, i.e. se $f : I_n \to P(A)$, $n \in \mathbb{N}$, $|f|$ denota o número n;
- $X \in f$ denota que existe $i \in I_n$, tal que $f(i) = X$, onde $f : I_n \to P(A)$.

Definição 2.3 (Multiplicidade). *Sejam f uma família e $X \in f$, diz-se que X tem multiplicidade n em f, se a família $[X]^n$ é subfamília de f, mas a família $[X]^{n+1}$ não é subfamília de f. Denotaremos a multiplicidade do conjunto X na família f por $\mu_f(X)$.*

Definição 2.4 (Igualdade de famílias). *Dadas duas famílias f e g diz-se que $f = g$ se $f < g$ e $g < f$.*

Definição 2.5 (Família robusta). *Uma família f é dita robusta, se $|\cup(f)| > |f|$.*

Definição 2.6 (Família consistente). *Uma família $f : I_n \to P(A)$ é dita consistente, se toda subfamília de f é robusta.*

Definição 2.7 (Elemento crítico). *Sejam $f = [X_1, X_2, \cdots, X_n]$ uma família consistente e $i \in I_n$. Um elemento $x \in A$ é dito crítico de X_i com relação a f ou simplesmente crítico de X_i (se não existir ambigüidade), se as seguintes condições são verificadas:*

1. *$x \in X_i$,*
2. *A família $f' = [X_1, X_2, \cdots, (X_i - \{x\}), \cdots, X_n]$ não é consistente.*

 © 2017 SBMAC

3 Resultados e Definições das Famílias Consistentes

Proposição 3.1. *Dadas duas famílias f e g, então $|\cup(f \vee g)| = |\cup(f)| + |\cup(g)| - |(\cup(f)) \cap (\cup(g))|$ e $|f \vee g| = |f| + |g| - |f \wedge g|$.*

Demonstração. Dado que para quaisquer conjuntos X e Y tem-se que $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$, tomando $X = \cup(f)$ e $Y = \cup(g)$ o primeiro resultado é imediato. Adicionalmente, temos que $|f| = \sum_{X \in P(A)} \mu_f(X)$, $|g| = \sum_{X \in P(A)} \mu_g(X)$, $\mu_{f \vee g}(X) = max\{\mu_f(X), \mu_g(X)\}$, $\mu_{f \wedge g}(X) = min\{\mu_f(X), \mu_g(X)\}$ e $max\{a, b\} = a + b - min\{a, b\}$ para quaisquer que sejam a e b de onde segue o segundo resultado.

□

Proposição 3.2. *Sejam $f = [X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n]$ uma família consistente, $i_0 \in I_n$ e $x \in A$ elemento crítico de X_{i_0}, então existe uma subfamília $g : I_m \to P(A)$ de f tal que:*

1. *$X_{i_0} \in g$,*
2. *$| \cup (g)| = m + 1$ e*
3. *x é crítico de X_{i_0} com relação a g.*

Demonstração. Como x é crítico de X_{i_0} então a família, $f' = [X_1, X_2, \cdots, X_{i_0} - \{x\}, \cdots, X_n]$ não é consistente, i.e. existe uma subfamília $g' = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_m]$ de f' que não é robusta. É claro que $(X_{i_0} - \{\ x\ \}) \in g'$, pois caso contrário g' sería subfamília de f e toda subfamília de f é robusta. Seja então j_0, tal que $Y_{j_0} = (X_{i_0} - \{\ x\ \})$. A subfamília $g = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_{j_0} \cup \{x\}, \cdots, Y_m]$ de f satisfaz as condições desejadas.

De fato, basta observar que $(\cup(g) - \{x\}) = \cup(g')$, pois g é robusta e g' não. Logo $| \cup (g)| = |(\cup(g')| + 1$, de onde se deduz fácilmente que $| \cup (g)| = m + 1$.

□

Proposição 3.3. *Dadas duas famílias f e g, então $\cup(f \wedge g) \subset (\cup(f) \cap \cup(g))$.*

Demonstração. Seja $x \in \cup(f \wedge g)$, então existe um conjunto $X \in (f \wedge g)$, tal que $x \in X$. Agora, se $X \in (f \wedge g)$, então $X \in f$ e $X \in g$. Daí, $X \subset (\cup(f) \cap \cup(g))$.

Logo, $x \in (\cup(f) \cap \cup(g))$.

□

Definição 3.1 (Família associada)**.** *Dados uma família consistente f e um elemento crítico x de $X \in f$, uma subfamília g de f é dita associada a x relativamente a X e f, ou simplesmente associada a x, se não existir ambiguidade se satisfaz as seguintes condições:*

1. *$| \cup (g)| = |g| + 1$,*
2. *x é crítico para X com relação a g e*
3. *Se existe uma subfamília g' de g satisfazendo as condições 1 e 2, então $g' = g$.*

Proposição 3.4. *Sejam $f = [X_1, X_2, \cdots, X_n]$ uma família consistente e $i_0 \in I_n$. Então uma e somente uma das afirmações seguintes é verdadeira:*

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0230 © 2017 SBMAC

1. $|X_{i_0}| = 2$ *ou*

2. X_{i_0} *contém no máximo um elemento crítico.*

Demonstração. Sejam , $g = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_m]$ uma subfamília de f, x elemento crítico de X_{i_0} com relação a f, de forma que g é associada a x com relação a f e X_{i_0}. Sem perder generalidade suponhamos que $X_{i_0} = Y_m$, e seja $g' = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_{m-1}]$. Antes de iniciar a prova da proposição será necessário provar alguns fatos:

Fato 1. $x \notin \cup(g')$.
Prova: Suponhamos que $x \in \cup(g')$, então $g_1 = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_m - \{x\}]$ é robusta, mas não é consistente, logo existe $g_2 = [W_1, W_2, \cdots, W_s]$ subfamília de g_1 que não é robusta. Sem perder generalidade sejam $W_s = (Y_m - \{x\})$ e $g_3 = [W_1, W_2, \cdots, W_s \cup \{x\}]$, se $x \in \cup(g_2)$, então g_3 não é robusta, mas g_3 é uma subfamília de f o que é uma contradição, logo $x \notin \cup(g_2)$. Como $x \in \cup(g')$, então $g_3 < g$, $|g_3| = |\cup(g_3)| + 1$, x é crítico para $W_s \cup \{x\} = X_{i_0}$ com relação a g_3 e $g_3 \neq g$, o que é uma contradição. $\boxed{\square \text{ fato 1}}$

Fato 2. $(X_{i_0} - \{x\}) \subset \cup(g')$.
Prova: Suponhamos que existe $z \in X_{i_0}$, tal que $z \neq x$ e $z \notin \cup(g')$. Pelo fato 1, temos $x \notin \cup(g')$. Daí $|\cup(g')| \leq |\cup(g)| - 2 = (m+1) - 2 = m - 1$ e $|g'| = |g| - 1 = m - 1$, portanto g' não é robusta. Mas $g' < f$, logo f não pode ser consistente o que é um absurdo. $\boxed{\square \text{ fato 2}}$

Fato 3. A família: $g_1 = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_m - \{x\}]$ não é robusta.
Prova: Como $x \notin \cup(g')$ e $\cup(g) = m + 1$, então $|\cup(g_1)| = m$ e como $|g_1| = m$, então g_1 não é robusta. $\boxed{\square \text{ fato 3}}$

Continuamos agora com a prova da proposição. Se $|X_{i_0}| = 2$, então para qualquer elemento $u \in X_{i_0}$ a família $[X_{i_0} - \{u\}]$ não é robusta, pois os dois elementos de X_{i_0} são críticos.

Se $|X_{i_0}| > 2$, suponhamos que existe $y \neq x$ outro elemento crítico de X_{i_0} e $h = [Z_1, Z_2, \cdots, Z_t]$ a família associada a y com relação a X_{i_0} e f. Novamente por facilidade, suponhamos que $X_{i_0} = Z_t$ e seja $h' = [Z_1, Z_2, \cdots, Z_{t-1}]$. Pela proposição 3.1, temos que $|g \vee h| = |g| + |h| - |g \wedge h|$ e $|\cup(g \vee h)| = |\cup(g)| + |\cup(h)| - |(\cup(g)) \cap (\cup(h))|$. Como $g = g' \cup \{X_{i_0}\}$ e $h = h' \cup \{X_{i_0}\}$, então $|g \vee h| = m + t - (1 + |(g' \wedge h')|)$. Por outro lado, $|\cup(g \vee h)| = (m+1) + (t+1) - (2 + |(\cup(g')) \cap (\cup(h'))| = m + t - |(\cup(g')) \cap (\cup(h'))|$. Basta observar que pelo fato 1, $x \notin (\cup(g'))$ e $y \notin (\cup(h'))$ e pelo fato 2 $(X_{i_0} - \{x\}) \subset \cup(g')$ e $(X_{i_0} - \{y\}) \subset \cup(h')$. Como $|X_{i_0}| > 2$, então existe pelo menos um elemento $z \in X_{i_0}$, tal que $z \neq x$ e $z \neq y$. Pelo fato 2, $z \in \cup(g')$ e $z \in \cup(h')$, então $|(\cup(g')) \cap (\cup(h'))| \geq 1$.

Agora as famílias g' e h' não têm elementos em comum (I) ou $(g' \wedge h')$ é robusta (II), pois $(g' \wedge h')$ é subfamília de f. De (I), $|g \vee h| = m + t - 1$ e $|\cup(g \vee h)| = m + t - |(\cup(g')) \cap (\cup(h'))|$, mas $|(\cup(g')) \cap (\cup(h'))| \geq 1$, então $|\cup(g \vee h)| \leq m + t - 1 = |g \vee h|$. O que é uma contradição, pois $(g \vee h)$ é subfamília de f. De (II), $|g \vee h| = m + t - (1 + |(g' \wedge h')|)$ e $|\cup(g \vee h)| = m + t - |(\cup(g')) \cap (\cup(h'))|$. Pela proposição 3.3, $|\cup(g \vee h)| \leq m + t - |\cup(g' \wedge h')|$. Como $(g' \wedge h')$ é robusta, então $|\cup(g' \wedge h')| \geq 1 + |(g' \wedge h')|$. Logo, $|\cup(g \vee h)| \leq |g \vee h|$.

O que é uma contradição, pois $(g \vee h)$ é subfamília de f.

□

Exemplo 3.1 (Famílias robustas, consistentes, elemento crítico, família associada)**.**

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = [\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}]$.
   $n = 3$, $f(1) = \{1, 2, 3\}$, $f(2) = \{2, 3\}$, $f(3) = \{2, 4\}$.

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $g = [\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 4\}]$.
   $n = 3$, $g(1) = \{1, 2, 3\}$, $g(2) = \{3, 4\}$, $g(3) = \{3, 4\}$.

No *exemplo 3.1*, a família f é robusta e consistente, vejamos:
$|f| = 3 < | \cup (f)| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4$, logo f é robusta. Como $\cup([f(1), f(2)]) = 3$, $\cup([f(1), f(3)]) = 4$ e $\cup([f(2), f(3)]) = 3$ e $\cup([f(1)]) = 3$, $\cup([f(2)]) = \cup([f(3)]) = 2$, f também é consistente.

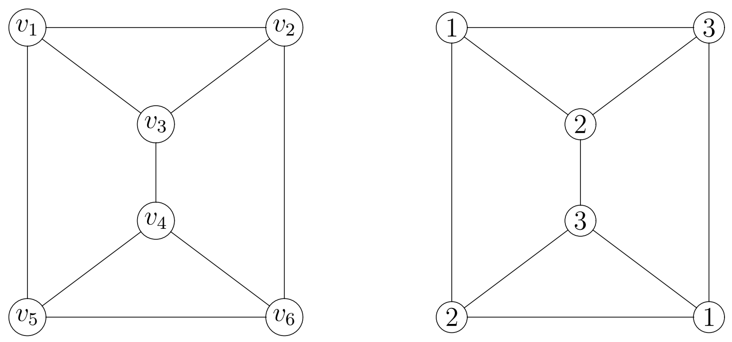
Já a família g é robusta mas não é consistente:
$|g| = 3 < | \cup (g)| = 4$, logo g é robusta. Mas $|[g(2), g(3)]| = 2 = | \cup ([g(2), g(3)])|$, logo g não é consistente.

No mesmo exemplo, 1 é elemento crítico de $\{1, 2, 3\}$ para a família f, pois a família $[\{2, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}]$ não é consistente, a família associada a 1 é $[\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}]$.

4 Coloração Total a partir das Famílias Consistentes

Conceitos introdutórios sobre grafos e coloração podem ser encontrados em [1] e [3]. Conceitos mais específicos sobre coloração, tais como coloração total e coloração com folga de ordem k, podem ser vistos em [6] e [7].

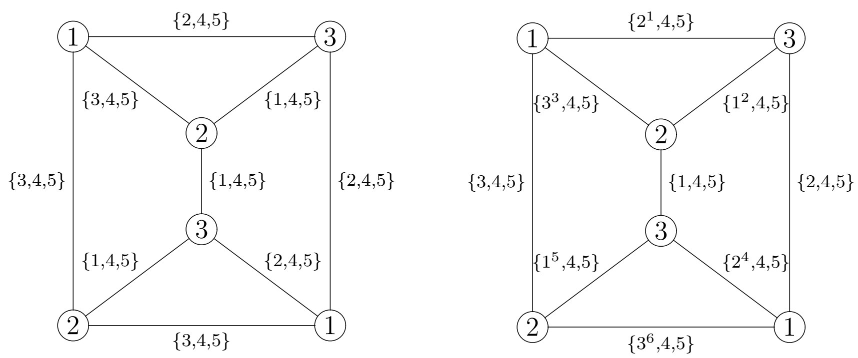
Abaixo ilustramos o passo a passo da coloração total de um grafo 3 regular, a partir do conceito das famílias consistentes. Segundo [6] todo grafo $G \neq C_5$ pode ser colorido com folga 2 com no máximo $\Delta + 2$ cores. Iniciamos gerando uma coloração de vértices com folga 2.



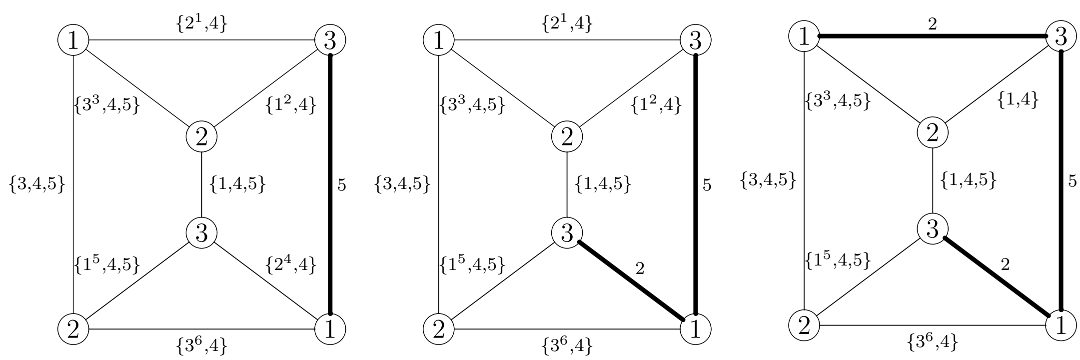
(a) Grafo 3-regular (b) Coloração de vértices com folga 2

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

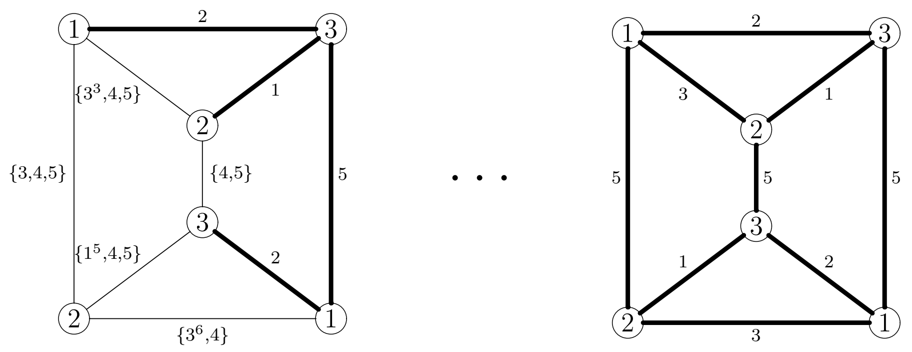
Na sequencia associamos a cada aresta um conjunto de cores permissíveis a ela, respeitando a conjectura de Vizing-Behzad, e a cada vértice associamos a família formada pelos conjuntos de cores correspondentes as arestas incidentes nele. É fácil ver que estas famílias são todas consistentes, uma vez que a coloração é com folga 2. O próximo passo é destacar os elementos críticos das famílias consistentes relacionadas a cada vértice. Optamos por inserir um sobreíndice no elemento crítico relativo à família ligada ao vértice de mesmo subíndice.



Em seguida iniciamos a coloração das arestas, escolhe-se uma aresta do grafo, por exemplo, aresta v_2v_6 e atribui-se a ela uma cor que não elimine nenhum elemento crítico das famílias relacionadas aos seus vértices extremos. Cada aresta colorida é marcada (nas figuras aparecem com linhas mais espessas) e a cor escolhida para esta aresta é removida dos conjuntos associados as arestas adjacentes a ela. Note que a cor escolhida em cada passo mantém a consistência de todas as famílias associadas aos vértices, pois não foram removidos os elementos críticos. Esse processo se repete até a coloração total do grafo ou até não existir uma aresta factível de ser colorida por esse método. Neste caso, se completa a coloração com o menor número de cores possível.



DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0230 © 2017 SBMAC



5 Conclusões

Este trabalho, como salientamos, apresentou resultados que mostram o potencial do conceito de famílias consistentes no desenvolvimento de uma heurística para a coloração total de grafos, procurando respeitar a conjectura de Vizing-Behzad. Ressaltamos ainda, que o fato de estarmos colorindo totalmente um grafo, não impede a busca por uma coloração total e equilibrada, conforme pode ser observado no exemplo acima. Para trabalhos futuros, pretendemos apresentar novas proposições que garantam a coloração total de subfamílias de grafos, respeitando a conjectura de Vizing-Behzad, utilizando o conceito de famílias consistentes, além de implementar e testar computacionalmente a heurística proposta.

Referências

[1] J. Bondy, U. Murty. *Graph Theory with Applications.* North-Holland, New York, 1976.

[2] M. Chams, A. Hertz and D. de Werra, Some experiments with simulated annealing for coloring graphs, *European Journal of Operational Research*, 32:260–266, 1987.

[3] R. Diestel. *Graph Theory.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[4] P. Galinier and A. Hertz, A survey of local search methods for graph coloring, *Computers & Operations Research*, 33:2547–2562, 2006.

[5] A. Hertz and D. de Werra, Using tabu search techniques for graph coloring, *Computing*, 39:345–351, 1987.

[6] A. R. G. Lozano and C. V. P. Friedmann and C. F. E. M. Waga and L. Markenzon. Coloração de Vértices com Folga, *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (XLI SBPO)*, Porto Seguro, Bahia, Brasil, 2009.

[7] H. Yap. *Total colourings of graphs.* Springer, Berlin, 1996.

 © 2017 SBMAC