

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Problema inverso de reconstrução de fonte concentrada para a equação de Helmholtz

Welerson Fernandes Kneipp<sup>1</sup>

Coordenação de Licenciatura em Física, CEFET/RJ, Petrópolis, RJ

Coordenação de Matemática Aplicada e Computacional, LNCC, Petrópolis, RJ

Alan Alves Santana Amad<sup>2</sup>

Coordenação de Matemática Aplicada e Computacional, LNCC, Petrópolis, RJ

Antônio André Novotny<sup>3</sup>

Coordenação de Matemática Aplicada e Computacional, LNCC, Petrópolis, RJ

**Resumo.** Neste trabalho, um problema inverso para a Equação de Helmholtz é estudado. O problema consiste em reconstruir uma fonte concentrada, ou seja, formada por uma combinação linear finita de massas do tipo delta-dirac, localizada em um domínio aberto e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , a partir da leitura de um subconjunto  $\Omega_o \subseteq \Omega$ . A estratégia adotada consiste em reescrever o problema inverso como um problema de otimização no qual um funcional é minimizado com respeito a um conjunto de soluções admissíveis introduzidos na formulação do problema. A partir da análise de sensibilidade do funcional, é proposto um método de segunda ordem não iterativo para a reconstrução de fontes concentradas. O método proposto é verificado numericamente.

**Palavras-chave.** Problemas Inversos, Fontes Concentradas, Equação de Helmholtz

## 1 Introdução

A equação de Helmholtz é uma EDP que modela os harmônicos temporais de fenômenos de propagação de ondas elásticas, acústicas e eletromagnéticas, com aplicações em problemas diretos e inversos [1]. Nesse trabalho desenvolve-se um método de otimização para reconstruir o termo fonte da equação de Helmholtz a partir da leitura de um subconjunto do domínio. O trabalho está organizado da seguinte maneira: Na Seção 2 apresenta-se a formulação matemática do problema de otimização, na 3 realiza-se a análise de sensibilidade do funcional em relação ao conjunto de soluções admissíveis e propõe-se a utilização de uma expansão de modo a não produzir resíduo. Na Seção 4 obtém-se a condição de otimalidade. Na Seção 5 apresenta-se um algoritmo para resolução do problema proposto utilizando os resultados obtidos Seção 4. Na Seção 6 realizam-se experimentos utilizando-se o método de otimização proposto e apresentam-se os resultados numéricos e, finalmente, as conclusões do trabalho são apresentadas na seção 7.

---

<sup>1</sup>welerson.kneipp@cefet-rj.br

<sup>2</sup>alanasa@lncc.br

<sup>3</sup>novotny@lncc.br

## 2 Formulação do Problema

Seja um domínio aberto e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  com fronteira Lipschitz contínua  $\partial\Omega$ . Sejam ainda dois subconjuntos  $\Omega_o \subseteq \Omega$  e  $\Omega_c \subseteq \Omega$ , denotados como domínios de observação e de controle, respectivamente. Neste trabalho considera-se o seguinte problema de controle ótimo

$$\text{Minimize}_{b \in C_\delta(\Omega_c)} \mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \|u - z\|_{L^2(\Omega_o)}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} (u - z) \overline{(u - z)} dx, \quad (1)$$

sendo  $\overline{(u - z)}$  o completo conjugado de  $u - z$ . O conjunto de soluções admissíveis  $C_\delta(\Omega_c)$  é dado por

$$C_\delta(\Omega_c) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \varphi(x) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta(x - x_i), \quad x_i \in \Omega_c \right\}, \quad (2)$$

onde  $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma distribuição também conhecida como função impulso ou função  $\delta$ -Dirac, sendo  $u$  solução do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} -\Delta u - k^2 u = b & \text{em } \Omega \\ \partial_n u + iku = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$  e o número de onda  $k$  um número real não negativo. Objetiva-se nesse trabalho determinar o termo fonte  $b$ , cujo suporte está contido em  $\Omega_c \subseteq \Omega$ , de modo a minimizar o funcional dado por (1). Assim, a incógnita do problema, representada por  $b^*(x)$ , é uma combinação linear finita de massas de Dirac, isto é,

$$b^*(x) = \sum_{i=1}^{M^*} \alpha_i^* \delta(x - x_i^*). \quad (4)$$

A obtenção de  $b^*(x)$  equivale a determinar os parâmetros  $M^* \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i^* \in \mathbb{R}$  e  $x_i^* \in \Omega_c$ , que representam, respectivamente, a quantidade, as intensidades e as localizações ótimas da fonte  $b^*(x)$ . Convém lembrar que  $\Omega_o$  é o subdomínio no qual o funcional (1) é observado e  $\Omega_c$  é o subdomínio no qual se busca a solução do problema.

## 3 Análise de Sensibilidade

Para realizar a análise de sensibilidade, utiliza-se um método baseado na variação do funcional com respeito ao conjunto de soluções admissíveis. Sendo assim, necessita-se perturbar o termo fonte  $b$  do problema (3), adicionando a ele  $m$  cargas pontuais em  $\Omega_c$ . O novo termo fonte, denotado por  $b_\delta$ , pertencente ao conjunto  $C_\delta(\Omega_c)$ , é dado por

$$b_\delta(x) = b(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta(x - x_i). \quad (5)$$

O problema perturbado é então caracterizado por

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \|u_\delta - z\|_{L^2(\Omega_o)}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} (u_\delta - z) \overline{(u_\delta - z)} dx, \quad (6)$$

sujeito a

$$\begin{cases} -\Delta u_\delta - k^2 u_\delta = b_\delta & \text{em } \Omega \\ \partial_n u_\delta + i k u_\delta = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

Para obter a variação do funcional com respeito a (2), calcula-se a diferença entre o funcional perturbado (6) e o funcional não perturbado (1), isto é

$$\mathcal{J}(u_\delta) - \mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} (u_\delta - z) \overline{(u_\delta - z)} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} (u - z) \overline{(u - z)} dx \quad (8)$$

Analisando a equação acima, não é possível tirar nenhuma conclusão a respeito da relação entre o funcional e o termo fonte. Nesse caso, associa-se a solução do problema não perturbado com a solução do problema perturbado. Subtraindo as equações de Helmholtz (7) e (3). Considerando  $\delta(x - x_i) = \delta_i(x)$ , tem-se que

$$-\Delta(u_\delta - u) - k^2(u_\delta - u) = b_\delta - b = \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta_i. \quad (9)$$

Como o interesse é analisar a sensibilidade do funcional em relação a perturbações no termo fonte e, considerando a expressão (9), define-se a diferença  $u_\delta - u$  como um somatório, isto é,

$$u_\delta(x) - u(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i(x). \quad (10)$$

Com isso, obtém-se a expansão a ser utilizada para a análise de sensibilidade do funcional

$$u_\delta(x) = u(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i(x). \quad (11)$$

Essa expansão fornece um conjunto de funções  $v_i$ , que são soluções de problemas cujo termo fonte depende dos pontos  $x_i$ . Ao analisar as equações (9) e (10), conclui-se que  $v_i$  é solução do problema de valor de contorno: Determine  $v_i$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta v_i - k^2 v_i = \delta_i & \text{em } \Omega \\ \partial_n v_i + i k v_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

Utilizando a expansão (11), reescreve-se o funcional perturbado (6) como

$$\mathcal{J}(u_\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \left( (u - z) + \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \right) \left( \overline{(u - z)} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{v_i} \right) dx. \quad (13)$$

Com isso, obtém-se a seguinte variação do funcional com relação a perturbação no termo fonte

$$\mathcal{J}(u_\delta) - \mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \left[ (u - z) \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{v_i} + \overline{(u - z)} \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i + \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \right) \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{v_i} \right) \right] dx \quad (14)$$

O funcional (14) depende explicitamente das intensidades  $\alpha_i$  e implicitamente dos pontos  $x_i$ , tornando clara a relação entre a variação do funcional e os parâmetros que definem  $b$ . De modo a tornar a notação mais concisa, define-se a função  $\Psi : \mathbb{R}^m \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X = \Omega_c^m$ , como a variação do funcional, ou seja,

$$\Psi(\alpha(\xi)) = \mathcal{J}(u_\delta) - \mathcal{J}(u) \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \quad (15)$$

Considerando que, para quaisquer complexos,  $w_1$  e  $w_2$ , vale a relação  $w_1 \overline{w_2} + \overline{w_1} w_2 = 2\Re(w_1 \overline{w_2})$ , a variação do funcional dada por (14) pode ser reescrita pela equação matricial

$$\Psi(\alpha(\xi)) = \frac{1}{2} \alpha(\xi) H \alpha(\xi) + \alpha(\xi) d \quad (16)$$

sendo as entradas da matriz  $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e do vetor  $d \in \mathbb{R}^m$  dados por

$$H_{ij} = \int_{\Omega_o} \Re(v_i \overline{v_j}) dx \quad e \quad d_i = \int_{\Omega_o} \Re((u - z) \overline{v_i}) dx. \quad (17)$$

Analisando o funcional (16), verifica-se que o mesmo é estritamente convexo em relação a  $\alpha_i$ , pois assume uma forma quadrática em relação a essas variáveis. Como consequência desse fato, a derivada da função  $\Psi(\alpha(\xi))$  em relação  $\alpha_i$  se anula sobre um ponto de mínimo. Importante destacar que a utilização da expansão (11) não produz resíduo.

## 4 Condição de Otimalidade

Para obter as intensidades ótimas resolve-se o sistema

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i}(\alpha(\xi)) = 0, \quad (18)$$

que pode ser reescrito na seguinte forma matricial

$$H \alpha(\xi) = d \quad (19)$$

com as entradas de  $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $d \in \mathbb{R}^m$  dadas por (17).

Resolvendo o sistema de segunda ordem (19) e substituindo os valores obtidos no funcional (16) tem-se

$$\Psi(\alpha(\xi)) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i d_i. \quad (20)$$

Utilizando a expressão (20), as localizações ótimas  $x_i^*$  são obtidas a partir de uma busca sobre o domínio do problema de otimização, isto é,

$$\xi^* = \operatorname{argmin}_{\xi \in X} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i d_i \right\} \quad (21)$$

consequentemente, as intensidades ótimas  $\alpha_i^*$  são representadas pelo vetor

$$\alpha^* = \alpha(\xi^*) \quad (22)$$

## 5 Algoritmo de Reconstrução

Nessa seção é apresentado, de forma sucinta, o algoritmo que descreve a resolução do sistema (19) e a busca pelos parâmetros ótimos  $\xi^*$ ,  $\alpha^*$  e  $S^*$  num domínio discretizado. Os dados de entrada do algoritmo são:

- A quantidade de cargas puntuais que se deseja encontrar, denotada por  $m$ ;
- O tamanho da malha sobre o qual os sistemas são resolvidos, dado por  $n$ ;
- O vetor  $d$  e a matriz  $H$ , cujas entradas, dadas por (17), são previamente calculadas.

O valor de  $m$  define a ordem do sistema, que é resolvido sobre uma malha com  $n$  pontos e fornece os valores das intensidades  $\alpha_i$ . Tomando-se conjuntos com  $m$  pontos, realiza-se uma busca combinatória de modo a determinar a  $m$ -upla de pontos que geram o menor valor para  $\Psi$ . Portanto, os dados retornados pelo algoritmo são:

- As localizações ótimas dadas por  $\xi^*$ ;
- Um vetor  $\alpha^* \in \mathbb{R}^m$  contendo as intensidades ótimas;
- O valor  $S^*$  que representa o valor mínimo assumido por  $\Psi$ .

A complexidade do algoritmo proposto é descrita em [3]. Convém destacar que a quantidade de cargas procuradas  $m$  é uma das entradas do algoritmo, ou seja, para cada valor atribuído a  $m$  obtêm-se soluções distintas para o problema de otimização.

## 6 Experimentos Numéricos

Nessa seção são realizados dois experimentos que correspondem à resolução numérica do problema proposto. Em ambos os exemplos realiza-se uma leitura parcial do domínio, isto é, considera-se  $\Omega_o \subsetneq \Omega$  com  $\Omega = (-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5) \subset \mathbb{R}^2$ , figura 1, e toma-se o número de onda  $k = 10$ . No primeiro exemplo, verifica-se a eficiência do método e do algoritmo proposto e apresenta-se um procedimento para obtenção do número de cargas puntuais. No segundo exemplo, verifica-se a robustez do método em relação a inclusão de ruído. Em [2] o problema é resolvido para o caso  $k = 0$  e condição de contorno Dirichlet homogênea. Para a realização da busca combinatória da solução ótima do problema,  $\Omega$  é discretizado em uma malha de elementos finitos, malha essa que não pode ser muito refinada por conta do custo computacional da busca. Para o cálculo dos problemas (3) e (12), realiza-se um refinamento da malha. O problema de controle proposto passa a ser um problema inverso de reconstrução de fontes quando o alvo, representado por  $z$ , é solução de um problema direto de Helmholtz cuja fonte é um conjunto finito de massas de Dirac, ou seja,  $z$  é solução do problema de valor de contorno: Determine  $z$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta z - k^2 z = b^* & \text{em } \Omega \\ \partial_n z + ikz = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (23)$$

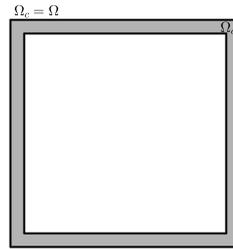


Figura 1: Relação entre domínios

### 6.1 Exemplo 1

Esse primeiro exemplo consiste na reconstrução do termo fonte dado por

$$b^*(x) = \alpha_1^* \delta(x - x_1^*) + \alpha_2^* \delta(x - x_2^*) + \alpha_3^* \delta(x - x_3^*). \quad (24)$$

As intensidades e as localizações são representadas, respectivamente, pelos vetores  $\alpha^* = (2, 3, 1)$  e  $\xi^* = ((-0.25, -0.25), (0.15, 0), (-0.2, 0.2))$ , com  $M^* = 3$ . Como o número de cargas pontuais é um dado de entrada do algoritmo de otimização, para cada valor de  $m$  fornecido obtém-se solução distinta para o problema. Nesse caso espera-se que, para  $m = 3$ , a solução do problema de controle, representada por  $b^*(x)$ , coincida com a solução do problema inverso, dado por (24). Realizando-se os experimentos considerando  $m = 1, 2, 3, 4$ , o algoritmo fornece os resultados dados pela tabela 1.

Tabela 1: Resultados obtidos: problema inverso com leitura completa

Nº de massas $m$	Intensidade $\alpha^*$	localização $\xi^*$
1	2.204	(0.2, 0)
2	(1.552, 2.1501)	((-0.3, -0.3), (0.15, 0))
3	(2, 3, 1)	((-0.25, -0.25), (0.15, 0), (-0.2, 0.2))
4	(2, 3, 1, $10^{-14}$ )	((-0.25, -0.25), (0.15, 0), (-0.2, 0.2), (-0.1, -0.3))

Ao analisar a solução encontrada, observa-se que a solução do problema de otimização coincide com o problema inverso, o que garante a eficácia do método. Caso não se conheça, a priori, a quantidade de massas da solução, pode-se adotar um procedimento para reconstrução do termo fonte. Tal procedimento consiste em considerar  $m = 1$  e incrementar a quantidade de massas até se obter um vetor intensidade  $\alpha^*$  com uma de suas componentes de valor desprezível. Assim, toma-se  $m = M^* + 1$  e, ao desconsiderar a carga de massa desprezível, obtém-se o valor  $M^*$  procurado. A figura 2 ilustra, graficamente, a solução para  $m = 3$  e  $m = 4$ .

### 6.2 Exemplo 2

Nesse experimento o interesse é analisar a estabilidade do método proposto visto que o alvo  $z$  foi obtido de forma sintética. Para isso impõe-se um nível de 10% de ruído uniforme ao alvo e analisam-se os dados retornados pelo algoritmo considerando  $m = 3$ . A fonte a

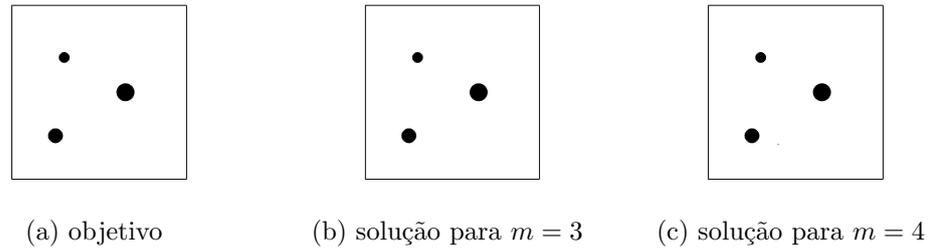


Figura 2: Solução para o problema inverso com leitura parcial

ser reconstruída, dada por (24), e a solução do problema de otimização  $b^*(x)$  é descrita na tabela 2, cuja análise indica que o método é robusto a ruído. Essa conclusão é, em parte, consequência do método de segunda ordem proposto não ser iterativo e pelo fato da expansão (11) não possuir resíduo.

Tabela 2: Comparação entre  $b^*$  e  $b^*$  para  $m = 3$ ,  $k = 10$  e nível de ruído 10%

	Intensidade	localização
$\bar{b}^*(x)$	$\alpha^* = (2, 3, 1)$	$\xi^* = ((-0.25, -0.25), (0.15, 0), (-0.2, 0.2))$
$b^*(x)$	$\alpha^* = (2.1, 3.15, 1.05)$	$\xi^* = ((-0.25, -0.25), (0.15, 0), (-0.2, 0.2))$

## 7 Conclusões

Nesse trabalho foi estudado um problema inverso para a Equação de Helmholtz cuja fonte é dada por massas de Dirac. Para resolver o problema proposto, foi desenvolvido um método variacional que consiste em calcular a sensibilidade do funcional com respeito ao conjunto de soluções admissíveis. O resultado obtido foi utilizado para construir um método de segunda ordem não iterativo para resolução do problema e nenhuma técnica de regularização foi introduzida. A eficácia e robustez do método desenvolvido ficaram comprovadas com os experimentos numéricos.

## Referências

- [1] A. El Badia and T. Nara, An inverse source problem for Helmholtz’s equation from the Cauchy data with a single wave number, *Inverse Problems*, volume 27, chapter 10, pages 105001, 2011.
- [2] W. F. Kneipp, T.J. Machado and A. A. Novotny, Problema de controle ótimo por fontes concentradas, *CILAMCE 2015 - XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Rio de Janeiro, 2015.
- [3] T. J. Machado, Um novo método para reconstrução de fontes concentradas, Tese de Doutorado, LNCC, 2016.