Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Soma dos Três Maiores Autovalores da Matriz Laplaciana Sem Sinal de uma Subfamília $G_{n,t}$ de Grafos *Split*

Bruno Amaro[1 2]
Instituto de Matemática, UFMS, Campo Grande, MS
Carlile Lavor[3]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, DMA, UNICAMP, Campinas, SP
Leonardo Lima[4]
Centro Federal de Educação Tecnológica, DEPRO, CEFET, Rio de Janeiro, RJ
Carla Oliveira[5]
Escola Nacional de Ciências Estatísticas, ENCE-IBGE, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Seja G um grafo simples com n vértices e $e(G)$ arestas. A matriz laplaciana sem sinal de G é dada por $Q(G) = D(G) + A(G)$, onde $D(G)$ é a matriz diagonal composta pelo grau dos vértices de G e $A(G)$ é a matriz de adjacência de G. Sejam $q_1, q_2, \ldots, q_n$ os autovalores de $Q(G)$ em ordem não-crescente. Nesse trabalho, provamos que existe uma subfamília $G_{n,t}$ da família de grafos *split* que satisfaz a Conjectura

$$T_k(G) = \sum_{i=1}^{k} q_i \leq e(G) + \binom{k+1}{2}$$

para a soma dos três maiores autovalores de Q.

Palavras-chave. matriz laplaciana sem sinal, soma de autovalores, limitantes.

1 Introdução

Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices e $e(G)$ arestas, denotamos por $A(G)$ a matriz de adjacência de G e $D(G)$ a matriz diagonal dada pela soma das linhas de $A(G)$, isto é, os graus dos vértices de G. A matriz $Q(G) = D(G) + A(G)$ é chamda de *matriz laplaciana sem sinal* de G. Como de costume, rotulamos os autovalores de $Q(G)$ em ordem não-crescente e os denotamos por $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n$. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices e $e(K_n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arestas. Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos disjuntos com V_1, V_2 e E_1, E_2 seus respectivos conjuntos de vértices e arestas. A

[1]Gostaríamos de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro dessa pesquisa.
[2]bruno.amaro@ufms.br
[3]clavor@ime.unicamp.br
[4]llima@cefet-rj.br
[5]carla.oliveira@ibge.gov.br

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0233

união $G_1 \cup G_2$ é o grafo $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. A junção (*join*) $G = G_1 \vee G_2$ é obtida de $G_1 \cup G_2$ onde cada vértice de G_1 é ligado por uma nova aresta a cada vértice de G_2. Um grafo *split* é um grafo cujos vértices podem ser particionados em uma *clique* (um subgrafo completo de um grafo G) e um conjunto independentes de vértices. Em 2013, Ashraf *et al.* [2] propuseram a Conjectura 1.1 a respeito da soma dos maiores autovalores de $Q(G)$:

Conjectura 1.1. *Seja G um grafo com $e(G)$ arestas. Então,*

$$T_k(G) = \sum_{i=1}^{k} q_i \leq e(G) + \binom{k+1}{2}, \text{ para todo } 1 \leq k \leq n.$$

Ashraf *et al.* [2] provaram que a Conjectura 1.1 é válida para $k = 1, 2, n-1, n$ e, se G for regular, ela é válida para $1 \leq k \leq n$. Alguns trabalhos vêm abordando o problema de forma isolada, uma vez que o caso geral da Conjectura 1.1 parece ser muito difícil de ser provado de tal forma que a Conjectura 1.1 continua em aberto. Recentemente, Yang e You [5] provaram que a Conjectura 1.1 é válida para grafos unicíclicos e bicíclicos para todo $1 \leq k \leq n$ e grafos tricíclicos com $k \neq 3$. Neste trabalho provamos que a Conjectura 1.1 é válida para uma subfamília de grafos $G_{n,t} = K_2 \vee (\overline{K}_{n-t-2} \cup K_t)$ da família de grafos *split* para o caso $k = 3$.

2 Família de Grafos $G_{n,t}$

Seja $G_{n,t}$ o grafo *split* com n vértices composto por uma clique com $t+2$ vértices e um conjunto com $n-t-2$ vértices independentes, com $2 \leq t \leq n-4$. Assim, a família $G_{n,t}$ é definida como o *join* $G_{n,t} = K_2 \vee (\overline{K}_{n-t-2} \cup K_t)$, onde $2 \leq t \leq n-4$.

Para os próximos resultados identificaremos $v_1, v_2, \cdots, v_{n-t-2}$ como os $n-t-2$ vértices independentes, v_{n-t-1} e v_{n-t} como os vértices da clique ligados aos $n-t-2$ vértices independentes e $v_{n-t+1}, v_{n-t+2}, \cdots v_{n-2}, v_{n-1}, v_n$ como os demais vértices da clique. Assim, apresentamos primeiro os Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3 e os Lemas 2.1, 2.2 e 2.3 que nos ajudará a obter o resultado principal deste trabalho.

Teorema 2.1 ([1], [4]). *Seja $M = (m_{ij})$ uma matriz em blocos quadrada de ordem n, onde cada $m_{ij}, 1 \leq i, j \leq k$, é uma matriz de ordem $n_i \times m_j$ tal que suas linhas têm soma constante igual a c_{ij}. Seja então a matriz $RM = (c_{ij}), 1 \leq i, j \leq k$. Então, o polinômio característico de RM divide o polinômio característico de M.*

A matriz RM do Teorema 2.1 é chamada de *matriz reduzida associada a matriz M*.

Teorema 2.2 ([3]). *Seja G um grafo conexo com n vértices. Então $q_n(G) < d_n$. Ainda, se $d_2 = n-1$, então $q_2(G) = n-2$.*

Teorema 2.3 ([3]). *A Conjectura 1.1 é válida para grafos regulares.*

Lema 2.1. *Sejam α, β, $n, t \in \mathbb{N}$. Se:*
a) $n = 6 + \alpha + \beta$ e $t = 2 + \alpha$, então $2 \leq t \leq n-4$, com $n \geq 6$;
b) $n = 8 + \alpha + \beta$ e $t = 4 + \alpha$, então $4 \leq t \leq n-4$, com $n \geq 8$;
c) $n = 9 + \alpha + \beta$ e $t = 5 + \alpha$, então $5 \leq t \leq n-4$, com $n \geq 9$.

Demonstração.

a) $n = 6+\alpha+\beta = 4+(2+\alpha)+\beta \Leftrightarrow n = 4+t+\beta \Leftrightarrow n \geq 4+t \Leftrightarrow t \leq n-4$. Do mesmo modo, $t = 2+\alpha \Leftrightarrow t \geq 2$, e portanto $2 \leq t \leq n-4$.

b) Mesma ideia do item *a)* tomando $n = 8+\alpha+\beta = 4+(4+\alpha)+\beta$.

c) Mesma ideia do item *a)* tomando $n = 9+\alpha+\beta = 4+(5+\alpha)+\beta$. □

Lema 2.2. *Sejam $n \geq 13$, $2 \leq t \leq n-4$ e a função $p : \mathbb{R}\times\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $p(x,n,t) = -x^3+(n+2t+2)x^2-(2nt+4t+4)x+4(t^2+t)$. Então,*

a) $p(0,n,t) > 0$ *e* $p(2,n,t) < 0$*;*

b) $p(t+1,n,t) < 0$ *e* $p(2t,n,t) > 0$*;*

c) $p(2t+1,n,t) > 0$ *e* $p\left(n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n},n,t\right) < 0$*;*

d) $p(n-2,n,t) > 0$ *e* $p(t,n,t) < 0$.

Demonstração. Sejam α e β naturais.

a) Observe que $p(0,n,t) = 4(t+t^2) > 0$ para todo $t > 0$. Seja $\sigma(n,t) = p(2,n,t) = 4t^2+4t+4n-4tn-8$. Logo, $\sigma(6+\alpha+\beta,2+\alpha) = -8-8\alpha-4\beta-4\alpha\beta < 0$ e do Lema 2.1*a)*, concluímos que $\sigma(n,t) = p(2,n,t) < 0$, para todo $2 \leq t \leq n-4$.

b) Observe que $p(2t,n,t) = 4t(t-1) > 0$, para todo $t \geq 2$. Seja $\psi(n,t) = p(t+1,n,t) = -3+n-t+3t^2-nt^2+t^3$. Logo, $\psi(6+\alpha+\beta,2+\alpha) = -3-4\alpha-\alpha^2-3\beta-4\alpha\beta-\alpha^2\beta < 0$ e do Lema 2.1*a)*, concluímos que $\psi(n,t) = p(t+1,n,t) < 0$, para todo $2 \leq t \leq n-4$.

c) Seja $\xi(n,t) = p(2t+1,n,t) = -3+n-4t+2nt$. Assim, $\xi(6+\alpha+\beta,2+\alpha) = 19+13\alpha+2\alpha^2+5\beta+2\alpha\beta > 0$ e do Lema 2.1*a)*, concluímos que $\xi(n,t) = p(2t+1,n,t) > 0$, para todo $2 \leq t \leq n-4$. Por outro lado,

$$p\left(n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n},n,t\right) = -127-\frac{8}{n^3}-\frac{52}{n^2}-\frac{126}{n}-36n-3n^2+\frac{443t}{2}+\frac{12t}{n^3}+\frac{90t}{n^2}+\frac{229t}{n}+47nt+ -\frac{333t^2}{2n}-\frac{51nt^2}{2}-\frac{n^2t^2}{2}+\frac{565t^3}{8}+\frac{t^3}{n^3}+\frac{31t^3}{2n^2}+\frac{243t^3}{4n}+6nt^3-\frac{141t^4}{8}-\frac{3t^4}{2n^2}-\frac{11t^4}{n}-\frac{nt^4}{2}+\frac{19t^5}{8}+\frac{3t^5}{4n}-\frac{t^6}{8}$$

$$= a(t)+\frac{b(t)}{n^3}+\frac{c(t)}{n^2}+\frac{d(t)}{n}+e(t)n+f(t)n^2 =$$

$$= \frac{a(t)n^3+b(t)+c(t)n+d(t)n^2+e(t)n^4+f(t)n^5}{n^3} = \frac{\xi_1(n,t)}{n^3}$$

onde

$\xi_1(n,t) = a(t)n^3+b(t)+c(t)n+d(t)n^2+e(t)n^4+f(t)n^5$ e

$a(t) = -127+\frac{443t}{2}-\frac{651t^2}{4}+\frac{565t^3}{8}-\frac{141t^4}{8}+\frac{19t^5}{8}-\frac{t^6}{8}$,

$b(t) = -8+12t-6t^2+t^3$,

$c(t) = -52+90t-57t^2+\frac{31t^3}{2}-\frac{3t^4}{2}$,

$d(t) = -126+229t-\frac{333t^2}{2}+\frac{243t^3}{4}-11t^4+\frac{3t^5}{4}$,

$e(t) = -36+47t-\frac{51t^2}{2}+6t^3-\frac{t^4}{2}$ e

$f(t) = -3+\frac{5t}{2}-\frac{t^2}{2}$.

Portanto, para analisarmos o sinal de $p\left(n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n},n,t\right)$, basta que analisemos o sinal de $\xi_1(n,t)$ (já que o denominador n^3 é sempre positivo). Agora,

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0233

$\xi_1(9+\alpha+\beta,5+\alpha) = -49788-\frac{290871\alpha}{2}-145224\alpha^2-\frac{633101\alpha^3}{8}-\frac{109557\alpha^4}{4}-\frac{50371\alpha^5}{8}-\frac{1931\alpha^6}{2}-\frac{755\alpha^7}{8}-\frac{21\alpha^8}{4}-\frac{\alpha^9}{8}-55917\beta-\frac{204957\alpha\beta}{2}-\frac{308265\alpha^2\beta}{4}-\frac{264643\alpha^3\beta}{8}-\frac{73019\alpha^4\beta}{8}-\frac{6585\alpha^5\beta}{4}-191\alpha^6\beta-\frac{103\alpha^7\beta}{8}-\frac{3\alpha^8\beta}{8}-17226\beta^2-\frac{49485\alpha\beta^2}{2}-14658\alpha^2\beta^2-\frac{39083\alpha^3\beta^2}{8}-\frac{2061\alpha^4\beta^2}{2}-\frac{539\alpha^5\beta^2}{4}-\frac{21\alpha^6\beta^2}{2}-\frac{3\alpha^7\beta^2}{8}-2273\beta^3-\frac{5401\alpha\beta^3}{2}-\frac{4981\alpha^2\beta^3}{4}-\frac{2413\alpha^3\beta^3}{8}-\frac{353\alpha^4\beta^3}{8}-\frac{27\alpha^5\beta^3}{8}-\frac{\alpha^6\beta^3}{8}-136\beta^4-\frac{271\alpha\beta^4}{2}-\frac{91\alpha^2\beta^4}{2}-\frac{13\alpha^3\beta^4}{2}-\frac{\alpha^4\beta^4}{2}-3\beta^5-\frac{5\alpha\beta^5}{2}-\frac{\alpha^2\beta^5}{2}$, ou seja, $\xi_1(9+\alpha+\beta,5+\alpha)<0$ e do Lema 2.1*c)*, concluímos que $p\left(n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n},n,t\right)<0$ para $5\le t\le n-4$.

Para os casos em que $2\le t\le 4$, temos:

- $p\,(n+2,n,2)=16-4n<0$, para todo $n\ge 5$.
- $p\left(n+2-\frac{1}{n},n,3\right)=38+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^2}-\frac{6}{n}-3n=\frac{38n^3+1+2n-6n^2-3n^4}{n^3}=\frac{f_3(n)}{n^3}$,

onde $f_3(n)=38n^3+1+2n-6n^2-3n^4$. Assim, para analisarmos o sinal de $p\left(n+2-\frac{1}{n},n,3\right)$, basta analisar o sinal de $f_3(n)$. Como $f_3(13+\alpha)=-3184-7252\alpha-1566\alpha^2-118\alpha^3-3\alpha^4<0$, segue que $f_3(n)<0$, para $n\ge 13$, ou seja, $p\left(n+2-\frac{1}{n},n,3\right)<0$, para $n\ge 13$.

- $p\left(n+3-\frac{2}{n},n,4\right)=83+\frac{8}{n^3}+\frac{4}{n^2}-\frac{34}{n}-n^2=\frac{83n^3+8+4n-34n^2-n^5}{n^3}=\frac{f_4(n)}{n^3}$, onde $f_4(n)=83n^3+8+4n-34n^2-n^5$. Como $f_4(9+\alpha)=-1252-13244\alpha-5083\alpha^2-727\alpha^3-45\alpha^4-\alpha^5$, segue que $f_4(n)<0$, para $n\ge 9$, ou seja, $p\left(n+3-\frac{2}{n},n,4\right)<0$, para $n\ge 9$.

Portanto, $p\left(n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n},n,t\right)<0$, para $2\le t\le n-4$ e $n\ge 13$.

d) Sejam $\sigma_1(n,t)=p(n-2,n,t)=4t^2+4n^2+20t-20n-8tn+24$ e $\sigma_2(n,t)=p(t,n,t)=t^3+2t^2-t^2n$. Logo, $\sigma_1(6+\alpha+\beta,2+\alpha)=8+12\beta+4\beta^2>0$ e $\sigma_2(6+\alpha+\beta,2+\alpha)=-8-8\alpha-2\alpha^2-4\beta-4\alpha\beta-\alpha^2\beta<0$ e, do Lema 2.1*a)*, concluímos que $\sigma_1(n,t)=p(n-2,n,t)>0$ e $\sigma_2(n,t)=p(t,n,t)<0$, para todo $2\le t\le n-4$. $\square$

Lema 2.3. *Sejam $n\ge 13$ e $2\le t\le n-4$. Então,*

$$[0,2]\cap[t+1,2t]\cap\left[2t+1,n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n}\right]=\emptyset.$$

Demonstração. Sejam α e β naturais. Para provarmos tal afirmação é suficiente provarmos que $0<2<t+1<2t<2t+1<n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n}$, para todo $n\ge 13$ e $2\le t\le n-4$. Como é imediato que $2<t+1$ e $t+1<2t$, para todo $t\ge 2$ e $2t<2t+1$, para todo t, basta mostramos que $2t+1<n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n}$, para todo $n\ge 13$ e $2\le t\le n-4$. Provar essa desigualdade equivale a provar

$$2t+1<n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n}\Leftrightarrow n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n}-2t-1>0\Leftrightarrow\frac{t^2n+2n^2-9nt+8n-2t+4}{2n}>0.$$

Como o denominador nessa última desigualdade é sempre positivo, para provarmos que $2t+1<n+\frac{t^2-5t+10}{2}-\frac{t-2}{n}$, basta que provemos que $t^2n+2n^2-9nt+8n-2t+4>0$, para todo $n\ge 13$ e $2\le t\le n-4$. Para isto, definamos a função $\phi(n,t)=t^2n+2n^2-9nt+8n-2t+4$. Logo, $\phi(8+\alpha+\beta,4+\alpha)=28+10\alpha+9\alpha^2+\alpha^3+20\beta+3\alpha\beta+\alpha^2\beta+2\beta^2>0$ e, do Lema 2.1*b)*, concluímos que $\phi(n,t)>0$ para todo $4\le t\le n-4$.

Para os casos em que $t=2$ e $t=3$, temos:

- $\phi(n,2)=2n^2-6n>0$, para todo $n\ge 4$;
- $\phi(n,3)=2n^2-10n-2>0$, para todo $n\ge 6$.

Assim, temos que $\phi(n,t)>0$ para $2\le t\le n-4$ e $n\ge 13$, donde $\frac{t^2n+2n^2-9nt+8n-2t+4}{2n}=\frac{\phi(n,t)}{2n}>0$. $\square$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0233

Teorema 2.4. *Seja G um grafo com $n \geq 13$ vértices e isomorfo ao grafo $G_{n,t} = K_2 \vee (\overline{K}_{n-t-2} \cup K_t)$, tal que $2 \leq t \leq n-4$. Então:*
(i) 2 é autovalor de $Q(G)$ com multiplicidade $n-t-3$;
(ii) $n-2$ é autovalor de $Q(G)$ com multiplicidade 1;
(iii) t é autovalor de $Q(G)$ com multiplicidade $t-1$;
(iv) A matriz reduzida $RQ(G)$ é dada por

$$RQ(G) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ n-t-2 & n & t \\ 0 & 2 & 2t \end{pmatrix}$$

e seus 3 autovalores equivalem aos autovalores q_1, q_3 e q_n de $Q(G)$.

Demonstração. Suponha G isomorfo a $G_{n,t}$. A matriz $Q(G)$ pode ser escrita da forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 2I_{(n-t-2)\times(n-t-2)} & \mathbb{J}_{(n-t-2)\times 2} & 0_{(n-t-2)\times t} \\ \hline \mathbb{J}_{2\times(n-t-2)} & (n-2)I_{2\times 2} + \mathbb{J}_{2\times 2} & \mathbb{J}_{2\times t} \\ \hline 0_{t\times(n-t-2)} & \mathbb{J}_{t\times 2} & tI_{t\times t} + \mathbb{J}_{t\times t} \end{array}\right),$$

onde I é a matriz identidade, $\mathbb{J}$ é uma matriz cujas entradas são todas iguais a 1 e os blocos diagonais são, respectivamente, de ordem $n-t-2, 2$ e t. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ seja e_i o vetor cuja i-ésima entrada é igual a 1 e as demais iguais a 0. Assim:

(i) Defina os vetores $x_i = e_1 - e_i, \forall\ i = 2, \ldots, n-t-2$. Observe que $Q(G)x_i = 2x_i$. Logo, 2 é autovalor com multiplicidade, no mínimo, $n-t-3$.

(ii) O vetor $z = e_{n-t-1} - e_{n-t}$ é um autovetor associado ao autovalor $n-2$.

(iii) Defina os vetores $y_i = e_{n-t+1} - e_{n-t+i}, \forall\ i = 2, \ldots, t$. Observe que $Q(G)y_i = ty_i$. Logo, t é autovalor com multiplicidade, no mínimo, $t-1$.

(iv) Pelo Teorema 2.1 obtemos a matriz reduzida $RQ(G)$ de $Q(G)$ e todos seus autovalores também são autovalores de $Q(G)$. Resta então mostrar que os três autovalores equivalem aos autovalores $q_1(G)$, $q_3(G)$ e $q_n(G)$ de $Q(G)$. O polinômio característico de $RQ(G)$ é dado por $RQ_G(x) = p(x,n,t) = -x^3 + (n+2t+2)x^2 - (2nt+4t+4)x + 4(t^2+t)$.

Dos itens *(i), (ii)* e *(iii)* acima temos $n-t-3+t-1+1 = n-3$ autovalores conhecidos. Agora, do Lema 2.2*a)* e *d)* segue que $p(2,n,t) \neq 0$, $\quad p(n-2,n,t) \neq 0 \quad$ e $\quad p(t,n,t) \neq 0$ e, portanto, 2, $n-2$ e t não são autovalores de $RQ(G)$, isto é, os demais 3 autovalores de $Q(G)$ são exclusivamente determinados pela matriz $RQ(G)$ e são distintos de 2, $n-2$ e t.

Do Lema 2.2*a), b)* e *c)* e Lema 2.3, o polinômio caracterísitico $p(x,n,t)$ possui exatamente uma raiz em cada um dos intervalos $[0,2]$,$[t+1,2t]$ e $\left[2t+1, n+\frac{t^2-5t+10}{2} - \frac{t-2}{n}\right]$, uma vez que $p(x,n,t)$ é de grau 3 e tais intervalos são disjuntos.

Do Teorema 2.2 temos $q_n(G) < d_n(G) = 2$, donde $q_n(G) \in [0,2]$. Como $d_1(G) = d_2(G) = n-1$ segue do mesmo Teorema que $q_2(G) = n-2$. Portanto, uma vez que $q_1(G) \geq q_2(G) \geq \cdots \geq q_n(G)$, e munidos dos resultados obtidos em *(i), (ii)* e *(iii)* acima, concluímos que $q_1(G) \in \left[2t+1, n+\frac{t^2-5t+10}{2} - \frac{t-2}{n}\right]$, $q_3(G) \in [t+1, 2t]$, $q_4(G) = q_5(G) = \cdots = q_{t+2}(G) = t$ e $q_{t+3}(G) = q_{t+4}(G) = \cdots = q_{n-1}(G) = 2$, seguindo o resultado.

□

A partir do Teorema 2.4 é fácil provar que $q_1(G_{n,t}) + q_2(G_{n,t}) + q_3(G_{n,t})$ é limitado superiormente por $e(G_{n,t}) + 6$, isto é, satisfaz a Conjectura 1.1 para $k = 3$.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0233

Teorema 2.5. *Para* $n \geq 13$ *e* $2 \leq t \leq n-4$, $T_3(G_{n,t}) < e(G_{n,t}) + 6$.

Demonstração. Seja G isomorfo a $G_{n,t}$ para $n \geq 13$ e $2 \leq t \leq n-4$. Note que o número de arestas de G pode ser dado por

$$e(G) = 2(n-(t+2)) + e(K_{t+2}) = 2n - 2t - 4 + \frac{(t+2)(t+1)}{2} = 2n - 2t - 4 + \frac{t^2+3t+2}{2} = \\ = \quad 2n + \frac{t^2+3t+2-4t-8}{2} \quad = 2n + \frac{t^2-t-6}{2}$$

Pelo Teorema 2.4*(iv)*, temos $2t+1 < q_1(G) < n + \frac{t^2-5t+10}{2} - \frac{t-2}{n}, q_2(G) = n-2$ e $t+1 < q_3(G) < 2t$. Logo

$$2t+1+n-2+t+1 < q_1(G)+q_2(G)+q_3(G) < n + \frac{t^2-5t+10}{2} - \frac{t-2}{n} + n - 2 + 2t$$
$$3t+n < T_3(G) < 2n + 2t - 2 + \frac{t^2-5t+10}{2} - \frac{t-2}{n}$$
$$3t+n < T_3(G) < 2n + \frac{4t-4+t^2-5t+10}{2} - \frac{t-2}{n}$$
$$3t+n < T_3(G) < 2n + \frac{t^2-t+6}{2} - \frac{t-2}{n}. \tag{1}$$

Sendo $e(G) = 2n + \frac{t^2-t-6}{2}$ temos

$$e(G) + 6 = 2n + \frac{t^2-t+6}{2}. \tag{2}$$

e substituindo (2) em (1), obtemos:

$$3t+n < T_3(G) < e(G) + 6 - \frac{t-2}{n} < e(G) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad T_3(G) < e(G) + 6.$$

□

Proposição 2.1. *A Conjectura 1.1 é verdadeira para* $G_{n,1} = K_2 \vee \overline{K}_{n-2}$, *com* $n \geq 13$, *isto é,* $T_3(G_{n,1}) < e(G_{n,1}) + 6$.

Demonstração. Para $t = 1$ temos, do Lema 2.2*a)*, $p(2,n,1) = 0$. Isso quer dizer que 2 é também autovalor da matriz reduzida $RQ(G)$ do Teorema 2.4*(iv)*. Logo, a partir do Teorema 2.4, temos $q_2(G) = n-2$, $q_3(G) = q_4(G) = \ldots = q_{n-1}(G) = 2$, $q_1(G) = \frac{2+n+\sqrt{-12+4n+n^2}}{2}$ e $q_n(G) = \frac{2+n-\sqrt{-12+4n+n^2}}{2}$ ($q_1(G)$ e $q_n(G)$ obtidos através da matriz reduzida $RQ(G)$). Não é difícil ver que $\frac{2+n+\sqrt{-12+4n+n^2}}{2} < n+3$ para todo n. Assim, $q_1(G) < n+3, q_2(G) = n-2$ e $q_3(G) = 2$. Por outro lado, $e(G)+6 = (2n-3)+6 = 2n+3$, e, portanto $q_1(G)+q_2(G)+q_3(G) < (n+3)+(n-2)+2 = 2n+3 = e(G)+6$. □

Proposição 2.2. *A Conjectura 1.1 é verdadeira para* $G_{n,n-3} = K_2 \vee (K_1 \cup K_{n-3})$, *com* $n \geq 13$, *isto é,* $T_3(G_{n,n-3}) < e(G_{n,n-3}) + 6$.

Demonstração. Para $t = n-3$ temos, do Lema 2.2*d)*, $p(n-2,n,n-3) = 0$. Isso quer dizer que $n-2$ é também autovalor da matriz reduzida $RQ(G)$ do Teorema 2.4*(iv)* e como $q_2(G) = n-2$, segue que, para $t = n-3$, $q_2(G) = q_3(G) = n-2$. Ainda, para esse caso, $q_4(G) = q_5(G) = \ldots = q_{n-1}(G) = n-3$ (Teorema 2.4*(iii)*), $q_1(G) = n-1+\sqrt{n^2-6n+13}$ e $q_n(G) = n-1-\sqrt{n^2-6n+13}$ ($q_1(G)$ e $q_n(G)$ obtidos através da matriz reduzida $RQ(G)$). Não é difícil ver que $n-1+\sqrt{n^2-6n+13} < n + \frac{(n-3)^2-5(n-3)+10}{2}$. Assim, $q_1(G) < n + \frac{(n-3)^2-5(n-3)+10}{2} - \frac{n-5}{n} = n + \frac{n^2-11n+34}{2} - \frac{n-5}{n}$ e $q_2(G) = q_3(G) = n-2 < 2(n-3) = 2n-6$. Por outro lado, $e(G) = 2 + e(K_{n-1}) = 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2 + \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{n^2-3n+6}{2}$, donde $e(G)+6 = \frac{n^2-3n+6}{2} + 6 = \frac{n^2-3n+18}{2}$.

$$\begin{aligned}\text{Portanto, } q_1(G)+q_2(G)+q_3(G) &< n+\tfrac{n^2-11n+34}{2}-\tfrac{n-5}{n}+n-2+n-2\\ &< n+\tfrac{n^2-11n+34}{2}-\tfrac{n-5}{n}+n-2+(2n-6)\\ &= \tfrac{n^2-3n+18}{2}-\tfrac{n-5}{n}=e(G)+6-\tfrac{n-5}{n}<e(G)+6. \quad \square\end{aligned}$$

Proposição 2.3. *A Conjectura 1.1 é verdadeira para* $G_{n,n-2}=K_2\vee K_{n-2}=K_n$*, com* $n\geq 13$*, isto é,* $T_3(G_{n,n-2})<e(G_{n,n-2})+6$.

Demonstração. Consequência imediata do Teorema 2.3, uma vez que K_n é um grafo regular. □

Assim, com base nessas informações e nas operações acima, podemos enunciar o principal resultado desse trabalho:

Teorema 2.6. *Seja* G *um grafo isomorfo ao grafo* $G_{n,t}=K_2\vee(\overline{K}_{n-t-2}\cup K_t)$*, com* $n\geq 13$ *e* $1\leq t\leq n-2$*. Então* $T_3(G)<e(G)+6$.

Demonstração. Consequência imediata do Teorema 2.5 e das Proposições 2.1, 2.2 e 2.3. □

3 Conclusões

Apresentamos uma subfamília $G_{n,t}$ da família de grafos *split* que satisfaz a Conjectura 1.1 para a soma dos três maiores autovalores de Q. Experimentos computacionais usando o AutoGraphicX (AGX) nos ajudaram tanto na busca dessas famílias de grafos quanto nas ideias dos resultados algébricos desse trabalho.

Referências

[1] B. D. Amaro, C. Lavor, L. Lima e C. Oliveira. Soma dos maiores autovalores da matriz Laplaciana sem sinal de um grafo, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 3, 2015. DOI 10.5540/03.2015.003.01.0232.

[2] F. Ashraf, G. R. Omidi e B. Tayfeh-Rezaie, On the sum of singless Laplacian eingevalues of a graph, *Linear Algebra and its Applications*, 438, 2013, 4539-4546.

[3] K. C. Das, On conjectures involving second largest signless Laplacian eigenvalue of graphs, *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2010, 3018-3029.

[4] M. A. A. Freitas, "Grafos Integrais, Laplacianos Integrais e Q-integrais", Tese de Doutorado, Engenharia de Produção, COPPE, UFRJ, 2009.

[5] J. Yang e L. You, On a conjecture for the singless Laplacian eigenvalues, *Linear Algebra and its Applications*, 446, 2014, 115-132.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0233