

---

## Uma família infinita de snarks Tipo 1

Diana Sasaki<sup>1</sup>

Departamento de Matemática Aplicada, IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

### Resumo.

Neste trabalho, provamos que todos os membros de uma família infinita de snarks obtida pela superposição, definida por Kochol em 1996, são Tipo 1. Este resultado contribui com as evidências de que não existe snark Tipo 2 com cintura pelo menos 5.

**Palavras-chave.** Snark, Coloração total, Superposição

## 1 Introdução

Em 1852, o matemático Francis Guthrie propôs a famosa Conjectura das Quatro Cores, afirmando que todo mapa geográfico podia ser colorido com no máximo 4 cores. Mais tarde, na busca de uma prova ou de um contraexemplo para esta conjectura, os grafos cúbicos, foco deste trabalho, desempenharam um papel importante. Em 1880, Tait [11] provou que a Conjectura das Quatro Cores era equivalente à afirmação de que todo grafo cúbico planar sem ponte possui índice cromático 3. A procura por um contraexemplo para a conjectura motivou o estudo de uma classe especial de grafos cúbicos chamada de *Snarks*. Este nome foi proposto por Gardner [4] baseado no poema “The Hunting of the Snark” de Lewis Carroll, no qual snarks eram animais difíceis de serem encontrados.

Antes de apresentarmos o objetivo e resultado deste trabalho, vejamos algumas definições importantes. Um *semigrafo* é uma tripla  $G = (V(G), E(G), S(G))$ , onde  $V(G)$  é o conjunto de vértices de  $G$ ,  $E(G)$  é o conjunto de arestas possuindo dois vértices extremos em  $V(G)$ , e  $S(G)$  é o conjunto de *semiarestas* possuindo um vértice extremo em  $V(G)$ . Um *grafo*  $G$  é um semigrafo sem semiarestas. Neste caso, denotamos como  $G = (V, E)$ . Seja  $G = (V, E, S)$  um semigrafo. O *grau*  $d(v)$  de um vértice  $v$  de  $G$  é o número de elementos de  $E \cup S$  que são incidentes a  $v$ . Dizemos que  $G$  é *d-regular* se o grau de todos os vértices é igual a  $d$ . Neste trabalho, estamos interessados em grafos e semigrafos 3- regulares, também chamados respectivamente de *grafos cúbicos* e *semigrafos cúbicos*. Um *ciclo* em um grafo é um caminho de tamanho no mínimo 3 que começa e termina no mesmo vértice. A *cintura* de  $G$  é o tamanho do menor ciclo contido em  $G$ .

Uma *k-coloração de arestas* de  $G$  é uma atribuição de  $k$  cores às arestas de  $G$  de forma que arestas adjacentes possuam cores diferentes. O *índice cromático*  $\chi'$  de  $G$  é o menor  $k$

---

<sup>1</sup>diana.sasaki@ime.uerj.br

tal que o grafo possui uma  $k$ -coloração de arestas. Pelo conhecido Teorema de Vizing [5], temos que  $\chi'$  é igual a  $\Delta$  ou  $\Delta + 1$ , onde  $\Delta$  é o grau máximo de  $G$ . Similarmente, uma  $k$ -coloração total de  $G$  é uma atribuição de  $k$  cores aos elementos (vértices e arestas) de  $G$  de forma que elementos adjacentes possuam cores diferentes. O número cromático total  $\chi_T$  de  $G$  é o menor  $k$  tal que o grafo possui uma  $k$ -coloração total. A conhecida Conjectura da Coloração Total [5] afirma que  $\chi_T$  é igual a  $\Delta + 1$  ou  $\Delta + 2$ . Grafos com  $\chi_T = \Delta + 1$  são chamados de *Tipo 1*, caso contrário, são chamados de *Tipo 2*. É importante notar que a Conjectura da Coloração Total foi provada para grafos cúbicos, ou seja, o número cromático total de um grafo cúbico é sempre 4 ou 5 [8].

Seja  $A$  um subconjunto próprio de  $V$ . Denotamos por  $\omega_G(A)$ , o conjunto de arestas de  $G$  com um extremo em  $A$  e o outro em  $V \setminus A$ . Um subconjunto  $F$  de arestas de  $G$  é um *corte de arestas* se existe um subconjunto próprio não vazio  $A$  de  $V$  tal que  $F = \omega_G(A)$  e dizemos que  $F$  é *induzido por*  $A$ . Se  $G$  possui um corte de arestas de tamanho 1, dizemos que  $G$  possui uma *ponte*. Se cada um dos  $G[A]$  e  $G[V \setminus A]$  possui pelo menos um ciclo, então  $\omega_G(A)$  é um *c-corte*. Um grafo cúbico é *ciclicamente 4-aresta-conexo* se este não possui um  $c$ -corte de arestas de cardinalidade menor que 4.

Agora estamos prontos para apresentar a principal definição. Um *snark* é um grafo cúbico ciclicamente 4-aresta-conexo com  $\chi' = \Delta + 1$ .

Motivados pela Conjectura 1.1 proposta por Cavicchioli et al. [3], investigamos uma família infinita de snarks construídos pela superposição [7] e provamos que todos são Tipo 1. Dessa forma, contribuimos com as evidências de que esta conjectura possa ser verdadeira. Outros trabalhos recentes relacionados à Conjectura 1.1 existem na literatura, citamos por exemplo [1, 2, 9, 10].

**Conjectura 1.1** (Cavicchioli et al., 2003). *Todo snark com cintura pelo menos 5 é Tipo 1.*

## 2 Família de snarks Tipo 1

A seguir, apresentamos uma família de snarks construída através do método chamado de *superposição*, proposto por Kochol [7] em 1996, e provamos que todos os seus membros são Tipo 1. Com este método, Kochol foi capaz de construir uma quantidade infinita de snarks com cintura grande. Portanto, sem dúvida, trabalhar com estas construções é um bom caminho para o estudo da Conjectura 1.1.

Para a construção, utilizamos os semigrafos cúbicos que admitem semiarestas isoladas, ou seja, semiarestas sem vértices extremos. Considere o semigrafo cúbico  $M = (V, E, S)$ .  $S$  é particionado em  $n$  conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , tais que  $|S_i| = k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Os conjuntos  $S_i$ 's são chamados de *conectores* do  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ -semigrafo  $M$ . Consideramos uma semiaresta isolada como dois elementos em  $S$ , um para cada extremo da semiaresta isolada.

Uma *superaresta* é um semigrafo com dois conectores e um *supervértice* é um semigrafo com três conectores. Os seguintes semigrafos serão usados na construção e estão ilustrados na Figura 1.

- (a) Seja  $G$  um snark e sejam  $u_1$  e  $u_2$  dois vértices não adjacentes de  $G$ . O  $(3, 3)$ -semigrafo  $G'$  obtido a partir de  $G$  pela remoção destes vértices é uma superaresta.

Na construção a seguir, utilizamos os snarks da família Snark-Flor;

- (b) O  $(1, 1)$ -semigrafo  $L'$  consistindo em uma semiaresta isolada é uma superaresta;
- (c) O  $(1, 3, 3)$ -semigrafo  $J'$  consistindo em duas semiarestas isoladas e um vértice extremo de três semiarestas é um supervértice;
- (d) O  $(1, 1, 1)$ -semigrafo  $N'$  consistindo em um vértice extremo de três semiarestas é um supervértice.

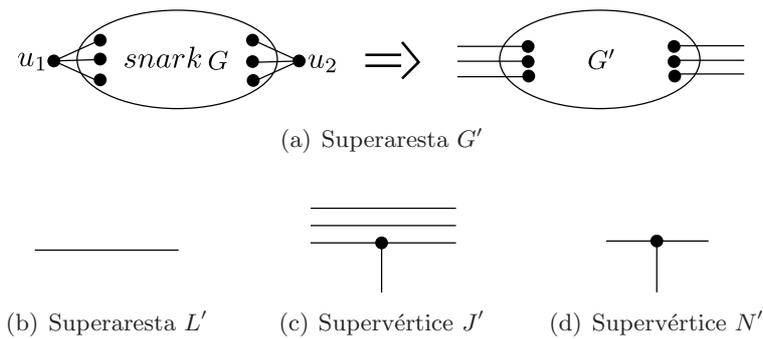


Figura 1: Semigrafos usados na construção.

Seja  $G$  um grafo cúbico. Substitua cada aresta  $e \in E$  por uma superaresta  $\xi(e)$  e cada vértice  $v \in V$  por um supervértice  $\vartheta(v)$ . Assuma que, se  $v \in V$  é incidente a  $e \in E$ , então um conector de  $\vartheta(v)$  é pareado com um conector de  $\xi(e)$ , ambos possuindo a mesma quantidade de semiarestas. Fazendo a junção das semiarestas, obtemos um grafo cúbico que é chamado *grafo de superposição de  $G$* , denotado por  $G(\vartheta, \xi)$ . As Figuras 1 e 3 apresentam todos os elementos envolvidos na construção.

De uma forma sucinta, apresentaremos a superposição que constrói um novo snark a partir do snark de Petersen, pela substituição de vértices e arestas pelos supervértices e superarestas listados acima.

Denotamos por  $F_i$ ,  $i \geq 5$  ímpar, o membro da conhecida família Snark-Flor, definida por Isaacs [6]. Para cada  $i$ , a partir do snark de Petersen, construímos um novo snark de ordem  $24i - 2$ .

Acompanhe a seguir as etapas da construção do snark  $P_i(\vartheta, \xi)$ ,  $i \geq 5$  ímpar.

- (1) Considere o Snark-Flor  $F_5$  da Figura 2. O  $(3, 3)$ -semigrafo  $F'_i$  de ordem  $4i - 2$  obtido a partir de  $F_i$  pela remoção dos vértices  $u_1$  e  $u_2$  (Figura 1 (a)), que são preservados em todos os snarks  $F_i$ ,  $i \geq 5$ , é uma superaresta usada na construção do novo snark  $P_i(\vartheta, \xi)$ .
- (2) Considere agora o grafo de Petersen  $P$  ilustrado na Figura 3. Para cada  $i$ , substitua as seis arestas  $x_1y_1, y_1z_1, z_1x_2, x_2y_2, y_2z_2, z_2x_1$  de  $P$  por seis cópias da superaresta  $F'_i$ , denotadas como  $A_i^1, A_i^2, A_i^3, A_i^4, A_i^5, A_i^6$ , respectivamente.

- (3) Substitua os seis vértices  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  de  $P$  por seis cópias do supervértice  $J'$  representado na Figura 1 (c).
- (4) Por fim, os demais elementos de  $P$  são preservados no novo snark  $P_i(\vartheta, \xi)$ . Mais precisamente, todas as arestas e vértices restantes são substituídos por cópias da superaresta  $L'$  e por cópias do supervértice  $N'$ , respectivamente representados nas Figuras 1 (b) e (d).

O grafo cúbico  $P_i(\vartheta, \xi)$  obtido por esta construção é um snark [7]. Como sempre removemos o mesmo par de vértices  $u_1$  e  $u_2$  de  $F_i$ , temos que esta família é bem particular. Portanto, outras famílias infinitas de snarks podem ser obtidas com esta mesma construção, utilizando os mesmos elementos e tomando outros pares de vértices em  $F_i$ , por exemplo.

**Teorema 2.1.** *Cada snark  $P_i(\vartheta, \xi)$ ,  $i \geq 5$  ímpar, é Tipo 1.*

*Demonstração.* A prova deste resultado requer três 4-colorações-totais para cada  $(3, 3)$ -semigrafo  $F'_i$  obtido a partir de cada Snark-Flor  $F_i$ ,  $i \geq 5$  ímpar, pela forma apresentada anteriormente. Utilizamos a 4-coloração-total da família Snark-Flor determinada por Campos et al. [2] e, com base neste trabalho, determinamos as outras 4-colorações-totais para os  $F'_i$ 's, que serão utilizadas nesta prova. Para mais detalhes sobre a construção da família Snark-Flor, indicamos [2, 6].

Para facilitar a visualização das colorações nas figuras, optamos por colorir somente as arestas. Observe que sempre existe uma cor disponível para cada vértice. Considere as 4-colorações-totais  $C^1, C^2, C^3$  do  $(3, 3)$ -semigrafo  $F'_i$  apresentadas na Figura 2 para o  $F'_5$  (a coloração  $C^3$  foi determinada por Campos et al. [2]). As três 4-colorações-totais  $C^1, C^2, C^3$  serão utilizadas na 4-coloração-total do snark  $P_i(\vartheta, \xi)$ .

Nas 4-colorações-totais  $C^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , indicadas na Figura 2, as três semiarestas de cada conector  $S_k$ ,  $k = 1, 2$ , do  $(3, 3)$ -semigrafo cúbico  $F'_i$  estão em negrito para facilitar a visualização. Além disso, exibimos somente as cores em  $C^j$  atribuídas aos vértices extremos de cada semiaresta. Cada  $C^j$  pode ser estendida de forma a colorir todos os  $F'_i$ 's,  $i \geq 7$ , seguindo o que foi feito em [2]. A Figura 2 exhibe  $C^j$  para o  $(3, 3)$ -semigrafo  $F'_5$ .

A 4-coloração-total do novo snark  $P_i(\vartheta, \xi)$ ,  $i \geq 5$  ímpar, utiliza a coloração  $C^3$  para  $A_1, A_2$  e  $A_3$ ,  $C^1$  para  $A_4$ , e finalmente  $C^2$  para  $A_5$  e  $A_6$ . Estendemos esta 4-coloração-total para o snark  $P_i(\vartheta, \xi)$  como na Figura 3; observe que não há conflito de cores entre os elementos. Assim, concluímos a prova.  $\square$

Uma generalização desta construção consiste em alterar a etapa (2) para: Substituir as seis arestas de  $P$  por seis superarestas obtidas a partir de  $F_i$ , considerando qualquer  $i$ , e esta generalização nos permite construir snarks de ordem  $118 + 8l$ ,  $l \geq 0$ , que são Tipo 1.

### 3 Conclusão

Neste trabalho, provamos que todos os membros de uma família de snarks construída pela superposição de snarks são Tipo 1. Como trabalhos futuros, iremos investigar a coloração total de outras famílias infinitas de snarks obtidas por esta construção.

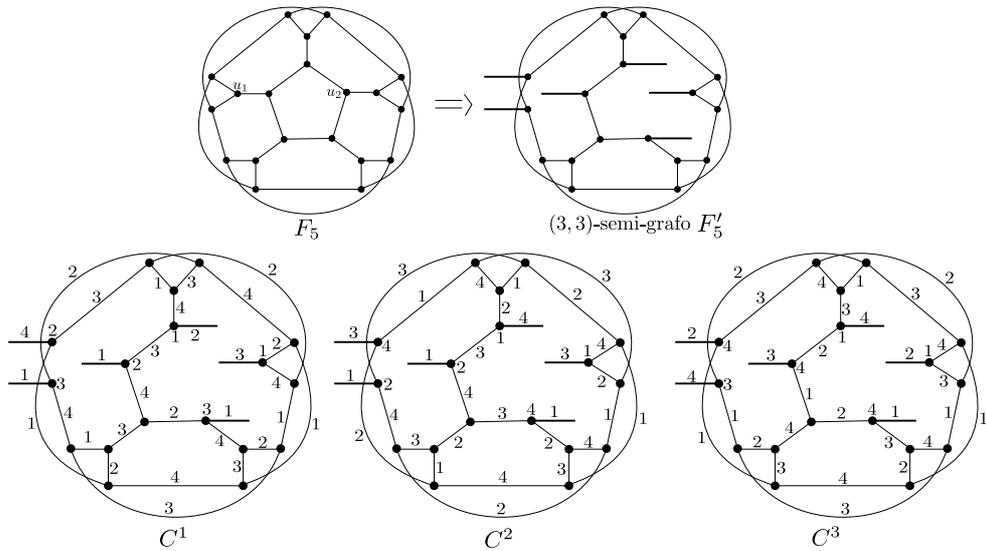


Figura 2: As 4-colorações-totais  $C^1, C^2, C^3$ .

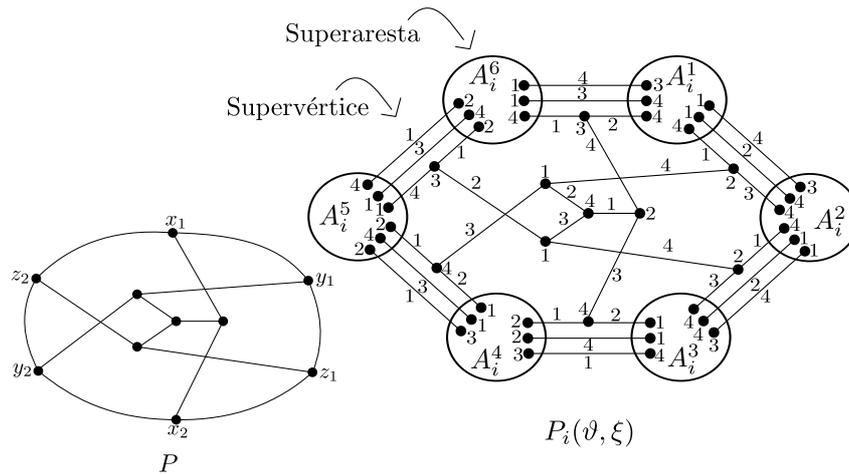


Figura 3: Um esquema da superposição abordada.

## Agradecimentos

Agradeço a minhas orientadoras de doutorado Celina M. H. de Figueiredo (COPPE/UFRJ), Simone Dantas (UFF) e Myriam Preissmann (G-SCOP, Grenoble, França) por todas as estimulantes discussões sobre o tema deste trabalho. Agradeço ao CNPq e ao projeto CAPES/COFECUB pelo apoio financeiro durante a execução desta pesquisa. Por último, agradeço ao revisor anônimo deste trabalho pela significativa simplificação da prova do Teorema 2.1 e pelas importantes sugestões que melhoraram o texto.

## Referências

- [1] G. Brinkmann, M. Preissmann e D. Sasaki. Snarks with total chromatic number 5, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 17 (1):369–382, 2015.
- [2] C. N. Campos, S. Dantas e C. P. Mello. The total-chromatic number of some families of snarks, *Discrete Math.*, 311:984–988, 2011.
- [3] A. Cavicchioli, T. Murgolo, B. Ruini e F. Spaggiari. Special classes of snarks, *Acta Appl. Math.*, 76 (1):57–88, 2003.
- [4] M. Gardner. Mathematical Games: Snarks, Boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem, *Sci. Am.*, 234 (4):126–130, 1976.
- [5] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
- [6] R. Isaacs. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable, *Amer. Math. Monthly*, 82 (3):221–239, 1975.
- [7] M. Kochol. Snarks without small cycles, *J. Combin. Theory Ser. B*, 67:34–47, 1996.
- [8] M. Rosenfeld. On the total chromatic number of a graph, *Israel J. Math.*, 9:396–402, 1971.
- [9] D. Sasaki, Sobre coloração total de grafos cúbicos. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2013.
- [10] D. Sasaki, S. Dantas, C. M. H de Figueiredo, M. Preissmann. The hunting of a snark with total chromatic number 5, *Discrete Appl. Math*, 164 (2):470–481, 2014.
- [11] P. G. Tait. Remarks on the colouring of maps, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 10 (729):501–503, 1880.