Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Invariante Global de Superfícies Fechadas: Grafos

Alana Cavalcante Felippe[1]
Depto de Ciências Exatas e Aplicadas, UFOP, João Monlevade, MG
Catarina M. J. Sánchez[2]
Depto de Matemática, UFV, Viçosa, MG

Resumo. Neste trabalho veremos que todo grafo com pesos nos vértices pode ser associado a alguma aplicação estável de uma superfície fechada na esfera, generalizando resultados de aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera.

Palavras-chave. Aplicações Estáveis, Grafos com Pesos, Superfícies Fechadas

1 Introdução

Segundo Whitney [10], as aplicações estáveis entre duas superfícies, localmente, podem ser vistas como aplicações do plano no plano. Se a superfície domínio é compacta, o conjunto singular de uma aplicação estável consiste de uma coleção de curvas fechadas, simples e disjuntas sobre o domínio, e estas curvas singulares podem separar ou não as componentes regulares.

O estudo do ponto de vista global destas aplicações, teve seu início com Hacon-Romero [2] em 2001, onde foi introduzido o *grafo dual* de aplicações estáveis, como um invariante topológico global de aplicações de superfícies fechadas no plano. Além de ser um invariante topológico, o grafo é uma ferramenta útil na construção de exemplos destas aplicações com um conjunto singular pré-determinado. Esta técnica foi estendida para aplicações entre superfícies fechadas orientadas em [4, 5, 9], aplicações de Gauss estáveis de superfícies fechadas no 3-espaço [6], aplicações de três variedades fechadas no 3-espaço em [7] e emparelhamento de arestas em [1].

Aqui, aplicamos a técnica de cirurgias para provar os Teoremas 4.3 e 4.4. Estes resultados são estensões dos Teoremas 4.1 e 4.2, obtidos em [4], que apresentam condições necessárias e suficientes para que grafos com pesos nos vértices possam ser associados às aplicações estáveis de superfícies fechadas na esfera.

2 Grafos associados a aplicações estáveis entre superfícies

Sejam M e N duas superfícies suaves e $C^{\infty}(M,N)$ o espaço de todas as aplicações de classe C^{∞} de M em N. Duas aplicações $f, g \in C^{\infty}(M,N)$ são ditas $\mathcal{A}-$*equivalentes*,

[1]alana@decea.ufop.br
[2]cmendes@ufv.br

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0240

quando existem difeomorfismos $\phi : M \to M$ e $\psi : N \to N$ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Uma aplicação $f \in C^\infty(M, N)$ é dita *estável*, se qualquer aplicação suficientemente próxima de f é equivalente a f (na C^∞-topologia de Whitney). Segundo Whitney [10], o conjunto de todas aplicações estáveis (ditas aplicações boas por Whitney) é aberto e denso no espaço das aplicações suaves $C^\infty(M, N)$. Um ponto x em M é dito ponto *regular* de f, se a aplicação f é um difeomorfismo local na vizinhança do ponto x, caso contrário dizemos que x é um ponto *singular*. As singularidades locais de f, segundo um Teorema de Whitney [10], são do tipo dobra ou cúspides. Uma aplicação estável sem pontos de cúspides é chamada de *aplicação dobra*.

Se M é uma superfície compacta, então o *conjunto singular* Σf está formado por um conjunto de curvas fechadas, simples, disjuntas e mergulhadas em M, que decompõe o conjunto regular $M \setminus \Sigma f$ em um número finito de regiões conexas, que são imersas em S^2 por f. As regiões regulares tem como bordo as curvas de Σf.

A imagem destas curvas singulares, denotado por $Bf = f(\Sigma f)$, é chamado de *contorno aparente* de f (ou conjunto de ramificação) e está formado por curvas suaves em N com um número finito de pontos duplos, de interseções trasversas, e possíveis pontos de cúspides.

Assim, podemos associar ao par $(M, \Sigma f)$, um grafo com pesos nos vértices da seguinte forma: cada *região regular* U de $M \setminus \Sigma f$, fazemos corresponder a um *vértice* v do grafo, cada *curva* α de Σf fazemos corresponder uma *aresta* a do grafo, um vértice v recebe o *peso* w se a região regular correspondente a v tem *gênero* w (soma de w toros). Uma aresta a conecta o vértice v se, e somente se, a curva singular correspondente a a está no bordo da região regular correspondente a v. Uma aresta do grafo é um *laço* se a vizinhança da curva está contida numa componente conexa regular. O laço recebe uma $\star$ se esta vizinhaça é uma *faixa de Möbius* (Figura 1b).

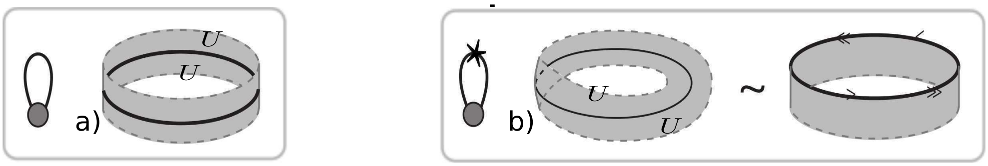

Figura 1: Vizinhança de uma curva.

Denotamos um grafo por $\mathcal{G}^S_W(V, E)$, para indicar que o grafo tem V vértices, E arestas, S laços com $\star$ e peso total nos vértices igual a W. Se $S = 0$, o grafo será denotado por $\mathcal{G}_W(V, E)$. $\mathcal{G}^S_W(V, E)$ é dito grafo *bipartido* se é possível atribuir sinais $\pm$ a cada um de seus vértices de forma que cada aresta conecte vértices de sinais opostos. Caso contrário, dizemos que $\mathcal{G}^S_W(V, E)$ é *não-bipartido*. Naturalmente, todo grafo bipartido tem $S = 0$.

Observe que um grafo com pesos nos vértices está associado a uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada na 2−esfera se, e somente se, o grafo é bipartido.

A Figura 2 ilustra três aplicações com única curva singular e seus respectivos grafos: (a) o grafo $\mathcal{G}^0_1(2, 1)$ corresponde a curva singular que separa um disco no toro; (b) o grafo $\mathcal{G}^0_0(1, 1)$ corresponde a curva singular que é bordo duas vezes da única componente regular na garrafa de Klein; (c) o grafo $\mathcal{G}^1_0(2, 1)$ corresponde a curva singular que tem como vizinhança a faixa de Möbius no plano projetivo.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0240

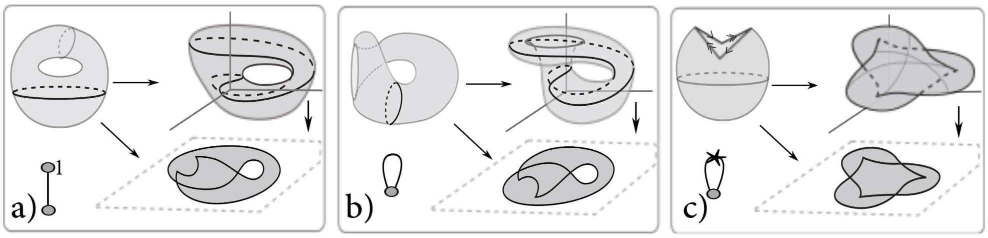

Figura 2: Exemplos de grafos com única aresta.

3 Transição de codimensão 1 e cirurgias

Uma aplicação estável f, de uma superfície fechada na esfera, pode ser obtida a partir de outra aplicação g conhecida, entre estas duas superfícies, passando por transições (aplicações não estáveis) ao longo de um caminho no espaço das aplicações suaves $C^\infty(M, S^2)$ (ver [8]).

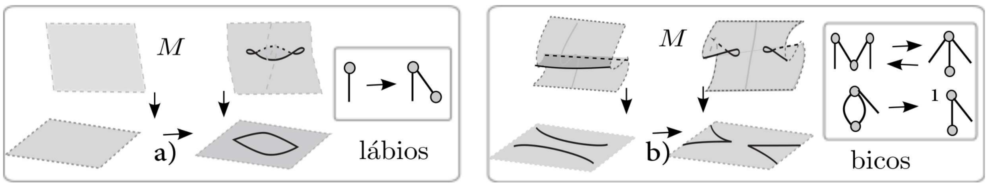

Figura 3: Singularidades estáveis do plano no plano.

a) A *transição lábios*, no sentido que aumenta o número de cúspides, aumenta uma nova curva singular e uma nova região regular (veja Figura 3a). Sobre o grafo, a transição aumenta uma aresta e um vértice com peso zero.
b) A *transição bicos*, no sentido que aumenta o número de cúspides, pode unir duas curvas singulares ou decompor uma (veja Figura 3b). Sobre o grafo, a transição pode identificar duas arestas e dois vértices, ou decompor um vértice e uma aresta em duas novas arestas ou ainda unir duas arestas, alterando o peso de um dos vértices por 1 (veja [9]).

Uma aplicação em uma classe de homotopia com grau d qualquer, pode ser construída através de cirurgias de aplicações estáveis que induz naturalmente a cirurgia sobre os grafos associados. Veremos dois tipos de cirurgias (horizontal e vertical) de aplicações, introduzida em [3].

Sejam P e Q duas regiões de superfícies contidas na superfície Z e sejam $f : P \longrightarrow S^2$ e $g : Q \longrightarrow S^2$ aplicações estáveis.

a) A *cirurgia horizontal* entre f e g pode ser feita da seguinte forma (ver Figura 4a):

1. Escolha dois arcos $l = f(l')$ e $j = g(j')$ nos contornos aparentes Bf e Bg, onde l' e j' são arcos de dobras em Σf e Σg, respectivamente, de forma que exista um caminho η entre l e j com $\eta \cap (Bf \cup Bg) = \varnothing$.

2. Retire dois discos D_l e D_j, vizinhança dos arcos l' e j', e repasse a seus interiores por um tubo T, respeitando as orientações de P e Q, obtendo assim uma nova superfície

fechada e orientada M.

3. Estenda a aplicação de forma estável sobre o tubo T, obtendo a aplicação estável $f +_h g : M \longrightarrow S^2$. Sobre o grafo, a cirurgia identifica as duas arestas, correspondentes as duas curvas singulares contendo l' e j', e os vértices conectados pelas duas arestas, respeitando as uniões das regiões regulares.

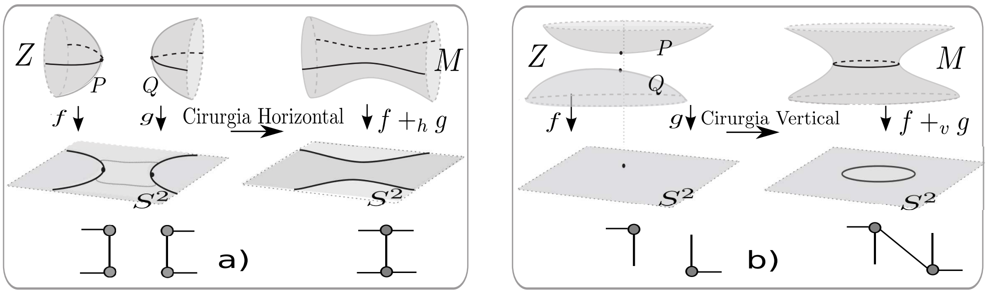

Figura 4: Cirurgias de aplicações estáveis.

b) A *cirurgia vertical* entre f e g pode ser feita da seguinte forma (ver Figura 4b):

1. Escolha dois pontos regulares $p \in P$ e $q \in Q$, tal que $f(p) = g(q)$ e remova dois pequenos discos D_p e D_q, vizinhança de p e q, respectivamente. Repasse a seus interiores por um tubo T, respeitando as orientações de P e Q, obtendo assim uma nova superfície fechada e orientada M.

2. Estenda a aplicação de forma estável sobre o tubo T, obtendo a aplicação estável $f +_v g : M \longrightarrow S^2$. Sobre o grafo, a cirurgia acrescenta uma aresta que conecta os dois vértices correspondente as regiões regulares que contém os pontos p e q.

A Figura 5 ilustra um exemplo de duas aplicações com duas curvas singulares, obtidas por cirurgias verticais sobre aplicações da esfera no plano. Em (a), a cirurgia transforma a esfera no toro; em (b) a cirurgia transforma a esfera na garrafa de Klein. Este exemplo deixa claro que a cirurgia sobre uma aplicação $f \in C^\infty(M, S^2)$ resulta numa aplicação em $h \in C^\infty(Z, S^2)$, onde M e Z em geral tem gêneros diferentes e Z pode ser não orientada mesmo quando M é orientada.

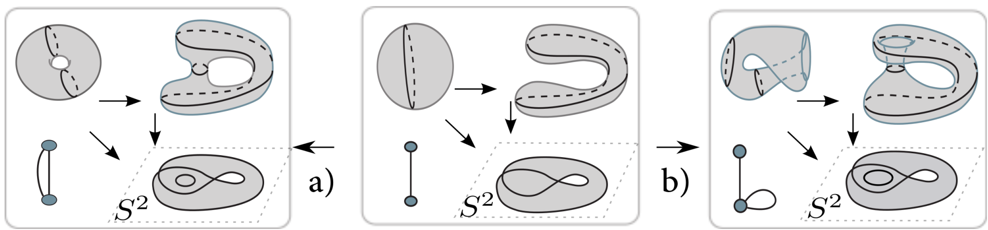

Figura 5: Exemplo de cirurgia vertical.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0240

4 Realização de grafos por aplicações estáveis

Aplicando técnicas de cirurgias de aplicações estáveis e transições de codimensão 1, foram provados em [4] os Teoremas 4.1 e 4.2, para aplicações de superfícies fechadas e orientadas na esfera. Os Teorema 4.3 e 4.4 estendem, respectivamente, os Teorema 4.1 e 4.2, para o caso geral incluindo as superfícies fechadas não orientadas.

Teorema 4.1. *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}_W(V, E)$ é realizado por uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada M na $2-$esfera, onde o gênero de M é dado por $g(M) = 1 - V + E + W$.*

Teorema 4.2. *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}_W(V, E)$ é realizado por alguma aplicação dobra de uma superfície fechada e orientada M na $2-$esfera com grau $d = (V^+ - V^-) - (W^+ - W^-)$.*

Teorema 4.3. *Todo grafo $\mathcal{G}_W^S(V, E)$ é realizado por uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada M na $2-$esfera, onde o gênero de M é dado por $g(M) = 1 - V + E + W$ se M é orientada e por $g(M) = 2(1 - V + E + W) - S$ se M é não orientada.*

Demonstração. Primeiro veremos como realizar o grafo para $S = 0$ e depois para $S > 0$. Denotamos por s o menor número de ciclos ímpar (não bipartidos) do grafo $\mathcal{G}_W^0(V, E)$, tal que se retirar uma aresta de cada um dos s ciclos, obtemos um grafo conexo bipartido $\mathcal{G}_W^0(V, E-s)$. Pelo Teorema 4.1, o grafo $\mathcal{G}_W^0(V, E-s)$ pode ser realizado por uma aplicação estável $h : Z \longrightarrow S^2$, onde Z é uma superfície fechada, orientada e com gênero $1-V+(E-s)+W$. Por cirurgias horizontais sobre as regiões correspondentes aos vértices no grafo original em que retirou as arestas, podemos fazer s cirurgias verticais, uma para cada uma das arestas, criando assim uma nova curva singular que realiza a aresta retirada, obtendo uma nova aplicação estável $g : X \longrightarrow S^2$ que realiza o grafo $\mathcal{G}_W^S(V, E)$, onde a superfície fechada X tem gênero $2(1 - V + E + W)$.

Agora, dado o grafo $\mathcal{G}_W^S(V, E)$, com $S > 0$, retiramos os S laços com $\star$ para obter o grafo $\mathcal{G}_W^0(V, E - S)$. Como no caso anterior, $\mathcal{G}_W^0(V, E - S)$ pode ser realizado por uma aplicação estável $g : X \longrightarrow S^2$. Por transições lips, uma para cada laço com $\star$ retirado, obtemos S novas curvas singulares e S novas componentes regulares, que correspondem no grafo a uma aresta e um vértice para cada laço com $\star$ retirado. Esta nova aplicação estável $g_1 : X \longrightarrow S^2$, está associada a um grafo $\mathcal{G}_W^0(V + S, E)$, onde a superfície fechada X tem gênero $2(1 - (V + S) + E + W)$.

Por S cirurgias horizontais entre a aplicação $g_1 : X \longrightarrow S^2$ e S aplicações tipo (c) na Figura 2, cada uma identificando arcos de uma das S curvas obtidas pela transição lips, obtemos uma aplicação estável $f : M \longrightarrow S^2$ que realiza o grafo $\mathcal{G}_W^S(V, E)$, onde onde M é uma superficie fechada e não orientada, com gênero $2(1 - V + E + W) - S$. ☐

Teorema 4.4. *Todo grafo $\mathcal{G}_W^0(V, E)$ é realizado por alguma aplicação dobra de uma superfície fechada M na esfera, onde o gênero de M é dado por $g(M) = 1 - V + E + W$ se M é orientada e por $g(M) = 2(1 - V + E + W)$ se M é não orientada.*

Demonstração. Primeiro observe na Figura 4, que as cirurgias, horizontal e vertical, não criam nenhuma cúspide. Como na demonstração do Teorema 4.3, seja s o número de ciclos

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0240

ímpar (não bipartidos) do grafo $\mathcal{G}^0_W(V,E)$. Seja $\mathcal{G}^0_W(V,E-s)$ o grafo conexo bipartido, obtido pela retirada de uma aresta de cada um dos s ciclos impar de $\mathcal{G}^0_W(V,E)$. Pelo Teorema 4.2, o grafo bipartido $\mathcal{G}_W(V,E-s)$ é realizável por alguma aplicação dobra $h : Z \longrightarrow S^2$ com grau $d = (V^+ - V^-) - (W^+ - W^-)$, onde a superfície fechada e orientada Z tem gênero $(1 - V + (E-s) + W)$.

Fazendo s cirurgias verticais para realizar as s arestas retiradas, como na demonstração do Torema 4.2, obtemos uma aplicação dobra $f : M \longrightarrow S^2$, onde M é uma superfície fechada e não orientada, com gênero $2(1 - V + E + W)$. □

Referências

[1] M. B. Faria, C. Mendes de Jesus and P. D. R. Sanchez, Surgeries of pairing of Edges associated to trivalent graphs, aceito em *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society* ,2015.

[2] D. Hacon , C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint. *Real and Complex Singularities*. Informa UK Limited, 2003. DOI:10.1201/9780203912089.ch10.

[3] D. Hacon , C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data *Topology and Its Appl.* 154 (1) 166–175, 2007. DOI:http://dx.doi.org/10.1016/j.topol. 2006.04.005.

[4] D. Hacon , C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere. *J. Sing.* 2: 67-80 ,2010. DOI:10.5427/jsing.2010.2e.

[5] C. Mendes de Jesus. Graphs of stable maps between closed orientable surfaces, *Comp. Appl. Math.*, 2016. DOI :10.1007/s40314-016-0317-9.

[6] C. Mendes de Jesus, S. M. de Moraes and M. C. Romero Fuster, Stable Gauss maps on surfaces from a global viewpoint, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 42: 87-103, 2011. DOI: 10.1007/s00574-011-0005-8

[7] C. Mendes de Jesus, R. Oset Sinha. and M. C. Romero Fuster, Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to R^3, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 267: 205-216, 2009. DOI: 10.1134/S0081543809040178

[8] T. Ohmoto and F. Aicardi, First Order Local Invariants of Apparent Coutours, *Topology*, 45: 27–45, 2006. DOI: 10.1016/j.top.2005.04.005.

[9] C. M. J. Sánchez, Grafos de Aplicações Estáveis entre Superfícies Fechadas, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 1, 2015. DOI :10.5540/03.2015.003.01.0226.

[10] H. Whitney, On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane, *Ann. of Math.* 62: 374-410, 1955. DOI 10.1007/978146122972827

