Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comparativo entre os Métodos Numéricos Exatos Fatoração LU Doolittle e Fatoração de Cholesky

Matheus Emanuel Tavares Sousa[1]
Matheus da Silva Menezes[2]
Ivan Mezzomo[3]
Sarah Sunamyta da Silva Gouveia[4]
Departamento de Ciências Exatas, Tecnológicas e Humanas, UFERSA, Campus Angicos, RN

O presente trabalho tem por objetivo efetuar um comparativo entre dois métodos numéricos exatos (ou diretos) de resolução de sistemas de equações lineares, são eles fatoração LU e fatoração de Cholesky. Efetuamos um experimento computacional usando o software SciLab, comparando o tempo de execução e o erro máximo dos métodos.

Uma equação é linear se cada termo contém não mais do que uma variável e cada variável aparece na primeira potência e têm a seguinte forma geral: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, com a_i sendo os coeficientes da equação, x_i são as incógnitas do problema e b é o termo independente da equação. De acordo com [2], um sistema de equações lineares é o grupo que conterá mais de uma equação linear, ou seja, é o conjunto de m equações e n incógnitas.

Fatoração LU Doolittle consiste na decomposição de uma matriz inicial M no produto das matrizes LU, tal que $M = LU$, com L possuindo apenas elementos 1 na sua diagonal principal, e usando as definições de igualdade e produto de matrizes para encontrar os elementos de L e U ao invés de usar a eliminação de Gauss, como é feito na fatoração LU tradicional. Para saber quem são os elementos das matrizes L e U, calculamos os elementos das linhas de L e os elementos das colunas de U por meio do uso das seguintes fórmulas gerais:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u_{ij} & = & a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} & i \leq j \\ l_{ij} & = & \left(\dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}} \right) & i > j \end{array} \right. \tag{1}$$

Segundo [1], os cálculos da fatoração LU podem ser simplificados, se a matriz em questão for classificada como simétrica ($M = M^t$) e definida positiva (uma matriz quadrada real simétrica M, é definida positiva se para todos os menores principais A_k, constituídos das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A, o $det(A_k) > 0$, $k = 1, \ldots, n$). Essa estratégia é chamada método de Cholesky e é baseada na seguinte proposição:

[1]matheus.emanuel@mail.com
[2]matheus@ufersa.edu.br
[3]imezzomo@ufersa.edu.br
[4]sssgouveia@gmail.com

Proposição 1: *Se a matriz M é simétrica, positiva definida, então M pode ser decomposta unicamente no produto GG^t, onde G é a matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.*

Vamos decompor a matriz inicial M em outras duas, G e G^t tal que $GG^t = M$. As fórmulas gerais para os elementos diagonais e não diagonais da matriz G de ordem $n \times n$ é dada, respectivamente, por:

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} & \\ g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{1/2} & i > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} g_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{g_{11}} & i > 1 \\ g_{ij} = \dfrac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk}\right)}{g_{jj}} & 2 \leq j < i. \end{cases} \tag{2}$$

Problema: Para a realização do comparativo entre a fatoração LU Doolittle e a fatoração de Cholesky, foram selecionados oito problemas, todos com as matrizes do tipo real, simétrica e denifinida positiva obtidas através dos repositórios Matrix Market e The University of Florida Sparce Matrix Collection. Os resultados obtidos e o tamanho N de cada matriz estão mostrados na tabela abaixo. O erro máximo é dado por: $\max\{|GG^t - A|\}$ para o método de Cholesky e $\max\{|LU - A|\}$ para a fatoração LU.

Problema	N	Cholesky		LU Doolittle	
		Tempo (seg)	Erro Max	Tempo (seg)	Erro Max
nos1	237	7,085	2×10^{-7}	13,119	0
mesh2e1	306	15,003	$0,014 \times 10^{-16}$	27,582	$8,88 \times 10^{-16}$
mhdb416	416	37,187	$0,044 \times 10^{-18}$	68,071	$3,469 \times 10^{-18}$
bcsstk20	485	58,585	$3,125 \times 10^{-2}$	107,323	$3,125 \times 10^{-2}$
nos6	675	156,51	$9,313 \times 10^{-10}$	286,39	$1,164 \times 10^{-10}$
685_bus	685	163,284	$0,227 \times 10^{-14}$	299,306	$5,684 \times 10^{-14}$
msc00726	726	194,23	$0,5 \times 10^{-8}$	355,729	$5,96 \times 10^{-8}$
nos7	729	196,645	$9,313 \times 10^{-10}$	360,247	$1,164 \times 10^{-10}$

Tabela 1: Resultado dos experimentos obtidos para os métodos de Cholesky e LU Doolittle.

Após a execução dos métodos, foram comparados os tempos de execução e o erro máximo de cada um. O método de Cholesky foi mais rápido com tempo de processamento em torno de 60% do utilizado pelo método de LU para fatorar as matrizes. Com relação a eficácia, ambos apresentaram resultados satisfatórios com baixo erro absoluto.

Referências

[1] N. B. Franco. *Cálculo numérico.* Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.

[2] S. Leon. *Álgebra linear com aplicações.* LCT, Rio de Janeiro, 2008.

[3] D. E. Sperandio, J. T. Mendes, L. H. Moken e Silva. *Cálculo Numérico - Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos.* Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2003.