Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Aplicação do método da potência para cálculo do raio espectral e condicionamento

Junior C. de Paula[1]
Ivan Mezzomo[2]
Matheus da Silva Menezes[3]
Fernando H. N. Amaral[4]
Departamento de Ciências Exatas, Tecnológicas e Humanas, UFERSA, Campus Angicos, RN

Em problemas estruturais é comum ocorrer que a resolução do sistema requeira a utilização de ferramentas da álgebra linear. Este trabalho tem por objetivo a aplicação do método da potência para encontrar o raio espectral de uma matriz e calcular o condicionamento através de seu raio espectral. Segundo [1], seja $A$ uma matriz. Um escalar $\lambda$ é um autovalor de $A$ se existe um vetor não-nulo $x$ tal que $Ax = \lambda x$. O vetor $x$ é um autovetor associado a $\lambda$. O número real $\lambda$ onde $Ax = \lambda x$ é o autovalor de $A$ associado ao autovetor $x$. De acordo com [2], uma norma $||.||$ do espaço vetorial das matrizes $m \times n$ é uma função que associa a cada matriz um número real não negativo que satisfaz as seguintes propriedades: Seja $\alpha$ qualquer escalar, $A$ e $B$ matrizes quadradas: (i) $||A|| \geq 0$ e $||A|| = 0$ se e somente se $A = 0$; (ii) $||\alpha A|| = |\alpha|.||A||$; (iii) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.

Segundo [2], em soluções do tipo $Ax = \lambda x$ a utilização do maior autovalor em módulo usamos o raio espectral $\rho(A)$, que é definido por: Seja $A$ uma matriz de ordem $n \times n$. O raio espectral da matriz $A$, denotado por $\rho(A)$, é dado por $\rho(A) = \max |\lambda|$, onde $\lambda$ é o autovalor de $A$.

Teorema 1 [2, Teorema 3.14]: *Seja $A$ uma matriz de ordem $n \times n$, então:*
*(i)* $||A||_2 = [\rho(A^t A)]^{\frac{1}{2}}$
*(ii)* $\rho(A) \leq A$, *para qualquer norma natural* $||.||$.

Ao trabalhar com matriz de ordem grande, surge a necessidade de saber qual o maior autovalor em módulo. O método da potência é uma técnica iterativa utilizada para determinar o autovalor dominante de uma matriz, conforme a seguir:

O método se aplica a matrizes $n \times n$ que tenham um autovalor dominante $\lambda_1$, de forma iterativa para produzir uma sequência de escalares que converge para $\lambda_1$ e uma sequência de vetores que converge para o autovetor correspondente $v_1$, o autovetor dominante. Vamos assumir que a matriz $A$ é diagonalizável.

Teorema 2: *Seja uma matriz $n \times n$ diagonalizáveis com autovalor dominante $\lambda_1$. Então, existe um vetor $x_0$ não nulo tal que a sequência de vetores $x_k$ definida por:* $x_1 = Ax_0; x_2 =$

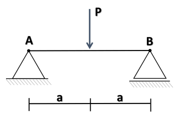
[1]junior.c9@hotmail.com
[2]imezzomo@ufersa.edu.br
[3]matheus@ufersa.edu.br
[4]fernandofhna@hotmail.com

$Ax_1; x_3 = Ax_2; \ldots; x_k = Ax_{k-1}; \ldots$, *tende a um autovetor dominante da matriz* $A$.

Note que, se um $x_k$ é aproximadamente um autovetor dominante de $A$ correspondente ao autovalor dominante $\lambda_1$, então: $x_{k+1} = Ax \approx \lambda_1 x_1$, assim surge a necessidade de normalizar $x_k$. Portanto substituímos $x_k$ por $y_k = (1/m_k)x_k$, onde $m_k$ é sua componente de maior valor absoluto. Resumindo:
1. Seja $x_0 = y_0$ um vetor inicial do $\mathbb{R}^n$ cuja maior componente é 1;
2. Repita os seguintes passos para $k = 1, 2, 3, \ldots$: (a) Calcule $x_k = Ax_{k-1}$; (b) Seja $m_k$ a componente de $x_k$ com maior valor absoluto; (c) Seja $y_k = (1/m_k)x_k$.

Para a maioria das escolhas de $x_0$, $m_k$ converge para o autovalor dominante $\lambda_1$, e $y_k$ converge para um autovetor dominante. De acordo com [1], definimos o condicionamento de matriz por: Uma matriz $A$ é dita mal condicionada se mudanças relativamente pequenas nos elementos de $A$ causam erros relativamente grandes nas soluções de $A\vec{v} = b$. Caso contrário, $A$ é dita bem condicionada. Neste caso analisaremos o condicionamento a partir do raio espectral, definida por $cond_\rho(A) = \rho||A||\rho||A^{-1}||$.

Exemplo: Considere o corpo rígido definido na figura abaixo onde $p = 1N$ e $a = 1m$.




Segundo [3], utilizaremos o método de equilíbrio em corpos rígidos para obter as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para a matriz $A$ utilizando o método da potência, tomaremos como vetor inicial $y_0 = x_0 = (1, 0)^t$, temos:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.67 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.83 \\ 1.67 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.91 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.95 \\ 1.91 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.98 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.98 \end{bmatrix}$ |
| $y_k$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.67 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.83 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.95 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.98 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.99 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.99 \end{bmatrix}$ |
| $m_k$ | 1 | 2 | 1.5 | 1.67 | 1.83 | 1.91 | 1.95 | 1.98 | 1.99 |

Para a matriz $A$ temos: $|m_k|_{\max} = |\lambda|_{\max} = 2$. Aplicando o método para a matriz $A^{-1}$ temos que $|\lambda|_{\max} = 1$. Logo $cond_\rho(A) = 2 \times 1 = 2$. Através do calculo do condicionamento concluímos que a matriz formada do corpo rígido é uma matriz mal condicionada, pois uma matriz é dita bem condicionada se o condicionamento for próximo de 1.

## Referências

[1] S. Leon. *Álgebra linear com aplicações.* Rio de Janeiro, LCT, 2008.

[2] R.L. Burden, J.D. Faires. *Análise Numérica.* São Paulo, Cengage Learning, 2013.

[3] R.C. Hibbeler. *Resistência dos Materiais.* 3 ed., Rio de janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.