Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Pré-condicionadores (I+S) e (I+R) aplicados ao método de Gauss-Seidel

Mairlane Silva de Alencar[1]
Ruth Samara Gadelha Chaves[2]
Felipe Andrade Mendes[3]
Matheus da Silva Menezes[4]
Ivan Mezzomo[5]
Departamento de Ciências Exatas, Tecnológicas e Humanas, UFERSA, Campus Angicos, RN

Para determinação da solução de sistemas de equações lineares, em alguns casos, as matrizes dos problemas não se encontram de forma adequada para aplicação de determinados métodos. Diante disso, as técnicas de pré-condicionamento se apresentam como uma forma alternativa para solucionar esse problema.

O método de Gauss-Seidel é um método iterativo estacionário e parte de uma condição inicial x^0, buscando convergir para uma solução aproximada do sistema em um número k de iterações [1]. A fórmula de atualização das variáveis é dada por:

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{k-1} \right) \tag{1}$$

Em [2] foi proposto o pré-condicionador $P = (I + S)$, considerando o sistema linear $PAx = Pb$ onde $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ é a matriz dos coeficientes, $P \in R^{n\times n}$ é o pré-condicionador, e $x, b \in R^n$ são vetores. Sem perda de generalidade, A pode ser dividida da seguinte forma: $A = I - L - U$, onde I é a matriz identidade, L e U são as partes triangulares inferior e superior de A. Definimos S pela equação (2):

$$S = (s_{i,j}) = \begin{cases} -a_{ii+j} & \text{para} \quad i = 1, ..., n-1, j = i+1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2}$$

A matriz pré-condicionada $A_S = (I - S)A$, pode ser reescrita como $A_S = I - L - SL - U + S - SU = (I - D) - (L + E) - (U - S + SU)$, onde D é a parte diagonal e E é a parte triangular estritamente inferior da matriz produto SL. A matriz iterativa de Gauss-Seidel é expressa como $T = (I - D) - (L + E)^{-1}$. Portanto, a matriz iterativa T_S pré-condicionada de Gauss-Seidel para A_S é: $T_S = \{(I - D) - (L + E)\}^{-1} (U - S + SL)$.

[1]mairlanealencar@hotmail.com
[2]ruth.samara@hotmail.com
[3]felipe_bandag1@hotmail.com
[4]matheus@ufersa.edu.br
[5]imezzomo@ufersa.edu.br

O segundo pré-condicionador, proposto por [3] é $P = (I + R)$, onde I é a matriz identidade, e R é definido pela equação (3):

$$R = (r_{n,j}) = \begin{cases} -a_{nj} & \text{para} \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3}$$

A matriz pré-condicionada pode ser reescrita como: $A_R = (I - L + R - RL - RU) - U = (I - L - D_R + R - RL - E_R) - U$ onde, D_R, E_R são as partes diagonal e triangular estritamente inferiores de RU respectivamente. A matriz iterativa modificada, pode ser definida por: $T_R = (I - D_R - L + R - RL - E_R)^{-1}U$.

Problema: Em [3, 4], temos a aplicação em problemas de dimensão 6. No presente trabalho, será feita, no $SciLab5.3$ uma análise do raio espectral, que é o parâmetro que o pré-condicionador visa alterar, ρ da matriz de iteração do método de Gauss Seidel com e sem pré-condicionadores em problemas de grande porte. As matrizes foram retirados dos repositórios *Matrix Market* e *Florida University**.

Tabela 1: Raio Espectral e Pré-Condicionadores

Problema	Tamanho	Sem PreCond	$I+S$	$I+R$	$I+R \to I+S$	$I+S \to I+R$
BCSSTK01	48	$8,09 \times 10^{26}$	$1,67 \times 10^{22}$	$7,43 \times 10^{19}$	$3,05 \times 10^{19}$	$2,22 \times 10^{26}$
BCSSTK05	153	$4,31 \times 10^{14}$	$1,22 \times 10^{8}$	$4,28 \times 10^{14}$	$1,15 \times 10^{7}$	$1,72 \times 10^{16}$
PDE225	225	$2,28 \times 10^{1}$	$3,83 \times 10^{4}$	$2,30 \times 10^{1}$	$3,83 \times 10^{4}$	$1,49 \times 10^{3}$
DWB512	512	$2,65 \times 10^{-2}$	$2,70 \times 10^{-3}$	$2,65 \times 10^{-2}$	$2,70 \times 10^{-3}$	$9,42 \times 10^{-3}$
NOS6	675	$3,75 \times 10^{13}$	$3,25 \times 10^{4}$	$4,01 \times 10^{13}$	$3,25 \times 10^{4}$	$2,93 \times 10^{24}$
BFWB782*	782	$1,00 \times 10^{-6}$	$1,00 \times 10^{-6}$	$1,00 \times 10^{-6}$	$1,00 \times 10^{-6}$	$1,00 \times 10^{-6}$
RDB800l*	800	$7,48 \times 10^{5}$	$4,27 \times 10^{0}$	$1,06 \times 10^{7}$	$4,27 \times 10^{0}$	$2,49 \times 10^{6}$
YOUNG3C*	841	$1,96 \times 10^{15}$	$4,10 \times 10^{3}$	$3,22 \times 10^{15}$	$4,10 \times 10^{3}$	$1,85 \times 10^{15}$

Os resultados nos mostram que a aplicação dos pré-condicionadores melhorou o raio espectral, com exceção do problema $PDE225$. Em cinco dos problemas analisados, a aplicação do $(I + S)$ resultou em melhoria significativa do parâmetro ρ. A aplicação em sequência de $(I + R) \to (I + S)$ também teve bom resultado, diminuindo consideravelmente o valor do ρ. Este fato é importante, pois, quanto menor o raio espectral maior a velocidade de convergência do método de Gauss Seidel. De acordo com [1], o método iterativo estacionário converge com qualquer valor inicial x^0 se,e somente se, $\rho(M) < 1$.

Referências

[1] F. F. Campos Filho. *Algoritmos Numéricos.* 2 ed., LTC, Rio de Janeiro, 2010.

[2] A.D. Gunawardena, S.K Jain, e L. Snyder, *Modified Iterative Methods for Consistent Linear Systems*, Linear Algebra and its Applications 154-156:123-143, 1991.

[3] M. Morimoto, H. Kotakemori, T. Kohno, H. Niki, *The Gauss-Seidel Method with Preconditioner(I+R)*, Transactions Japan Society for Industrial and Applied Mathematics (in japonese). 13:439-445, 2003.

[4] M. Usui, H. Niki e T. Kohmo, *Adaptive Gauss-Seidel Method for Linear Systems*, International Journal of Computer Mathematics. 51:119-125, 1994.